Ana PELLEJERO MATUTE

CÁLCULO

Introducción al concepto de Integral en Segundo de Bachillerato

TFM 2014

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Introducción al Concepto de Integral en Segundo de Bachillerato

Ana Pellejero Matute

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

	Página
Introducción general	**05**
Parte I: Conceptos previos en los que se fundamenta el concepto de integral en el currículo vigente y en los libros de texto	**07**
Capítulo 1. La integración en el currículo vigente	**11**
1.1.Contenidos en ESO	12
1.2.Contenidos en Bachillerato	14
Capítulo 2. Los criterios de evaluación en relación con la integración el currículo vigente	**19**
2.1. Criterios de evaluación en ESO	19
2.2. Criterios de evaluación en Bachillerato	22
Capítulo 3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre los conceptos de análisis base para la introducción de la integral, presentes en los libros de texto	**27**
3.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO opción A	27
3.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO opción B	29
3.3.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato de Ciencias Sociales	31
3.4.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato de Ciencias Sociales	32
3.5.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología	34
3.6.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología	36
Capítulo 4. Coherencia entre el currículo vigente y los libros de texto analizados.	**41**
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto	41
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo	44

Página

Parte II: Análisis de un proceso de estudio sobre el concepto de integración en 2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología **47**

Capítulo 5. La integración en el libro de texto de referencia **51**

5.1. Objetos matemáticos involucrados 51
5.2. Análisis global de la unidad didáctica 54

Capítulo 6. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica **65**

6.1. Dificultades 65
6.2. Errores y su posible origen 66

Capítulo 7. El proceso de estudio **71**

7.1. Estructura del proceso de estudio. 71
7.2. Distribución del tiempo de la clase 74
7.2. Actividades adicionales planificadas 75
7. 3. La tarea: actividad autónoma del alumnos prevista 78

Capítulo 8. Experimentación **81**

8.1. Muestra y diseño de la experimentación 81
8.2. El cuestionario 82
8.3. Cuestiones y comportamientos esperados 83
8.4. Resultados 84
8.5. Discusión de los resultados 89

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas **91**

Referencias **93**

Anexos **95**

A. Unidad didáctica del libro de texto 97
B. Solucionario actividades tema 8: Integración 109
C. Primera prueba opcional para subir nota 121
D. Segunda prueba opcional para subir nota 123
E. Examen tercera evaluación 125

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la introducción al concepto de integral en segundo curso de Bachillerato.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en Secundaria y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre se puede introducir el concepto de integral a partir de conceptos previos conocidos, que se ha puesto en marcha en un aula de segundo de Bachillerato en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Conceptos previos en los que se fundamenta el concepto de integral en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de los conceptos básicos, que conforman la base matemática necesaria para la correcta introducción al concepto de integral, en el currículo y en los libros de texto en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a análisis y geometría en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de segundo de Bachillerato, así como en dos cursos anteriores, en las dos modalidades posibles (Modalidad A y B en 4º de ESO y Ciencias de la salud y Ciencias Sociales en Bachillerato).

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1
La integración en el currículo vigente

En este primer capítulo se analizan los contenidos mínimos del currículo oficial vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para E.S.O. y Bachillerato, que hacen referencia directa o indirecta a conceptos base, que permiten introducir el tema de la integración. No se considera relevante, el estudio en la etapa de Educación Primaria debido a que no existe relación suficientemente próxima con la integración en este nivel educativo. Se consideran las distintas opciones en 4º de E.S.O. así como los diferentes itinerarios formativos en el Bachillerato.

El estudio pretende establecer una correlación longitudinal entre los contenidos base, buscando e identificando los núcleos de continuidad así como ausencias o presencia de este contenido en los distintos niveles según diversos descriptores que establecen las bases del estudio de la integración: Idea de medir, suma, composición, geometría, análisis de gráficas…

Como se puede extraer del currículo el tema de la integración es exclusivo de segundo curso de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias de la Salud. No obstante, parece sensato conocer qué conocimientos se han introducido en los cursos anteriores que permitan un correcto estudio de esta materia en este momento concreto.

A la falta de un bloque específico de análisis en el currículo de la ESO, se sigue la presentación de los contenidos a través de los bloques propuestos en dicho currículo, refiriéndose principalmente a los bloques de geometría, tratamiento de la información y funciones. En Bachillerato, la información extraída, se basa principalmente en el bloque de análisis.

Para el estudio, se estudia el currículo desarrollado en los siguientes Boletines Oficiales del Estado:

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Para el estudio sistemático del currículo se plantean 6 descriptores, que se estudiarán en todos los niveles, estableciendo el grado de desarrollo o la ausencia del mismo en cada curso. Se listan a continuación los descriptores utilizados:

D1. Uso de gráficas para obtener información

D2. Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes

D3. Sucesiones

D4. Concepto de límite

D5. Concepto y cálculo de derivadas

D6. Concepto y cálculo de integrales

1.1 Contendido en el currículo en ESO

Iniciando el estudio en el primer ciclo de secundaria, podemos establecer que los contenidos en los que se fundamente el concepto de integración se desarrollan principalmente en el bloque 4: geometría, donde se establecen conceptos básicos sobre el área y diversas propiedades de cuerpos geométricos sencillos. Así como al bloque 5: Funciones y gráficas donde se desarrollan conceptos de representación puntual e interpretaciones de funciones, que nos serán básicos para la interpretación gráfica de área bajo una curva.

	Descriptor	**Contenido 1º E.S.O.**	**Contenido 2º E.S.O.**
1	**Uso de gráficas para obtener información** (Bloque 5. Funciones y Gráficas)	Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que puedan afectar a su interpretación	Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su gráfica. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes** (Bloque 4: Geometría)	Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos. Polígonos regulares. La circunferencia y el círculo. Cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.	Poliedros y cuerpos de revolución. Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico. Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes. Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite**	--	--
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	--
6	**Concepto y cálculo de integrales**	--	--

Tabla 1. Contenidos en el primer ciclo de ESO

En la tabla 2, se muestran los contenidos en el segundo ciclo de la ESO. Destaca frente al ciclo anterior por la ampliación sustancial de familias así como una deficiencia de representación de funciones en tercer curso. Es resaltable en este ciclo, la integración de las nuevas tecnologías para el análisis gráfico de funciones. No obstante, la introducción de las nuevas tecnologías ya se ha producido a nivel inferior entre primer y segundo curso de ESO.

	Descriptor	**Contenido 3º ESO**	**Contenido 4º ESO Opción A**	**Contenido 4º ESO Opción B**
1	**Uso de gráficas para obtener información** (Bloque 3:Álgebra)		Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.	Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica.
	(Bloque 5: Funciones y gráficas)	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados	Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes** Bloque 4. Geometría)	Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Tabla 2.1. Contenidos en el segundo ciclo de ESO

<table>
<tr><th></th><th>Descriptor</th><th>Contenido 3º ESO</th><th>Contenido 4º ESO
Opción A</th><th>Contenido 4º ESO
Opción B</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Sucesiones

(Bloque 3: Álgebra)</td><td>Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.

Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.</td><td colspan="2">--</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Concepto de límite</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Concepto y cálculo de derivadas</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Concepto y cálculo de integrales</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td>Utilización de Herramientas tecnológicas

(Bloque 1. Contenidos comunes)</td><td></td><td>Utilización de herramientas tecnológicas para facilitarlos cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas</td><td></td></tr>
<tr><td>(Bloque 3. Álgebra)</td><td></td><td colspan="2">Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos</td></tr>
<tr><td>(Bloque 5. Funciones y gráficas.)</td><td>Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas</td><td></td><td>Uso de las tecnologías de la información en la representación,

Simulación y análisis gráfico.</td></tr>
</table>

Tabla 2.2 Contenidos en el segundo ciclo de ESO

1.2 Contendido en el currículo de Bachillerato

En la tabla 3 se muestran los contenidos del currículo de mínimos de ambos cursos de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología. El primer curso se centra principalmente en la interpretación de funciones y sus propiedades algebraicas, mientras que en el segundo se trabaja el concepto de límite, continuidad, derivadas e integrales, el tema objeto de estudio. Casi la totalidad del temario que nos sirve de referencia, pertenece al bloque de análisis.

	Descriptor	Contenido Matemáticas I	Contenido Matemáticas II
1	**Uso de gráficas para obtener información** (Bloque 3: Análisis)	Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Dominio, recorrido y extremos de una función. Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes** (Bloque 2: Geometría)	Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.	Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite** (Bloque 3: Análisis)	Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.	Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.
5	**Concepto y cálculo de derivadas** (Bloque 3: Análisis)	Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.	Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización
6	**Calculo de integrales** (Bloque 3: Análisis)	--	Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

Tabla 3: Contenidos en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Por último, en la tabla 4 se presentan los contenidos del Bachillerato de Ciencias Sociales, donde se muestra un temario mucho más abierto a contenidos generales así como a temas de estadística y probabilidad, no objeto de estudio para nuestro tema en concreto. La totalidad de los contenidos a destacar corresponden al bloque 2: Análisis, por lo que se omite esta información en la tabla siguiente.

	Descriptor	**Contenido Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I**	**Contenido Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II**
1	**Uso de gráficas para obtener información**	Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos	Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes**	--	--
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite**	--	Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía
6	**Calculo de integrales**	--	--

Tabla 4: Contenidos en Bachillerato de Ciencias Sociales

Capítulo 2

Criterios de evaluación en relación con la integración el currículo vigente

En este capítulo se estudian los diversos criterios de evaluación del currículo oficial vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para E.S.O. y Bachillerato, que hacen referencia de forma directa o indirectamente al tema de la integración. No se estudia, como en el apartado anterior, los cursos de educación primaria al no considerarse que exista relación suficientemente próxima a este tema en estos niveles educativos.

Los criterios de evaluación del currículo que se muestran a continuación estas clasificados por curso, según los descriptores indicados en el Capítulo I.

2.1.Criterios de evaluación en ESO

Los criterios de evaluación en 1º de la ESO, referidos a análisis se centran tanto en la representación como en la interpretación de funciones, mientras que en 2º curso se centran únicamente en la interpretación. Respecto a los conceptos geométricos en 1º se establecen las propiedades geométricas iniciando el cálculo de algunas de ellas, este proceso de desarrolla de forma más exhaustiva en el 2º curso. El resto de conceptos matemáticos, como ocurría en la tabla 1, no son objeto de estudio en este nivel educativo.

	Descriptor	**Criterios de evaluación 1º E.S.O.**	**Criterios de evaluación 2º E.S.O.**
1	**Uso de gráficas para obtener información**	Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado. Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.

Tabla 5.1 Contenidos de evaluación en el primer ciclo de ESO

	Descriptor	Criterios de evaluación 1º E.S.O.	Criterios de evaluación 2º E.S.O.
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes**	Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada. Este criterio pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.	Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada. Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite**	--	--
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	--
6	**Concepto y cálculo de integrales**	--	--

Tabla 5.2. Contenidos de evaluación en el primer ciclo de ESO

El en segundo ciclo de la ESO, el análisis gráfico se centra generalmente en la obtención de datos a partir de fenómenos reales observados, y de la capacidad de representación gráfica del mismo. Respecto a geometría 3º curso se centra en una visión más creativa del mundo, frente a las herramientas de descomposición estudiadas en 4º curso, donde se pretende a través de la simplificación la obtención de datos característicos de figuras o formas geométricas. En tercero de la ESO se establece necesario el control de secuencias numéricas sencillas.

<table>
<tr><th></th><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación 3º ESO</th><th>Criterios de evaluación 4º ESO Opción A</th><th>Criterios de evaluación 4º ESO Opción B</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Uso de gráficas para obtener información</td><td rowspan="2">Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.

Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación.

Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.</td><td colspan="2">Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.

Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis.</td></tr>
<tr><td>Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes</td><td>Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, como un recurso más de análisis.</td><td colspan="2">Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales. Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Sucesiones</td><td>Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica.</td><td colspan="2">--</td></tr>
</table>

Tabla 6.1. Criterios de evaluación en el segundo ciclo de ESO

	Descriptor	Criterios de evaluación 3º ESO	Criterios de evaluación 4º ESO Opción A	Criterios de evaluación 4º ESO Opción B
4	**Concepto de límite**	--	--	--
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	--	--
6	**Concepto y cálculo de integrales**	--	--	--

Tabla 6. Criterios de evaluación en el segundo ciclo de la ESO

2.2. Criterios de evaluación en Bachillerato

Este nivel educativo se caracteriza por un estudio mucho más extenso de análisis y algebra que en los niveles anteriores.

Centrándonos en primer lugar en la vía de Ciencias de la Salud y Tecnología. El primer curso se encamina a la obtención de herramientas analíticas para pasar en el segundo curso a la aplicación de las mismas en situaciones concretas. Además en este curso se procede al desarrollo de los conceptos de límite e integración como herramientas de análisis y se introduce la integral. En la tabla siguiente se muestran los criterios a tener en cuenta:

	Descriptor	Criterios de evaluación Matemáticas I	Criterios de evaluación Matemáticas II
1	**Uso de gráficas para obtener información**	Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, y extraer conclusiones sobre su comportamiento. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica.	Transcribir problemas reales a un lenguaje grafico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas especificas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida.

Tabla 7.1. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

	Descriptor	Criterios de evaluación Matemáticas I	Criterios de evaluación Matemáticas II
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes**	Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; Analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas. Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o graficas auxiliares como paso previo al cálculo. Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.	--
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite**	--	Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	
6	**Calculo de integrales**	--	Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables. Este criterio pretende evaluar la capacidad para medir el área de una región plana mediante el cálculo integral, utilizando técnicas de integración inmediata,

Tabla 7.2. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Frente a lo estudiado en el Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología, el Bachillerato de Ciencias Sociales se encamina principalmente a resolver e interpretar problemas de situaciones reales más que a la terminología y conceptos de análisis, que se establecía como objetivo en el Bachillerato de ciencias. La tabla 8 evidencia los diferentes énfasis que se asignan a los contenidos entre ambas modalidades.

	Descriptor	**Criterios de evaluación Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I**	**Criterios de evaluación Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II**
1	**Uso de gráficas para obtener información**	Transcribir a lenguaje algebraico o grafico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales.	Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
2	**Reconocimiento de figuras geométricas, clasificación según sus propiedades; Calculo de longitudes, superficies y volúmenes**	--	--
3	**Sucesiones**	--	--
4	**Concepto de límite**	--	--

Tabla 8.1. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias Sociales

	Descriptor	Criterios de evaluación Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	Criterios de evaluación Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II
5	**Concepto y cálculo de derivadas**	--	Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social. Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.
6	**Calculo de integrales**	--	--

Tabla 8.2. Criterios de evaluación en Bachillerato de Ciencias Sociales

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre los conceptos de análisis base para la introducción de la integral, presentes en los libros de texto

En los capítulos anteriores se ha realizado un estudio longitudinal de los contenidos del currículo y de los criterios matemáticos que se entendían básicos para la fundamentación y compresión del concepto de integral. Sin embargo, es evidente, que el contexto real del estudiante se define tanto por las limitaciones del currículo como la realidad del aula o el material utilizado. Por ello, en este capítulo de pretende abordar el aspecto desde la perspectiva desarrollada en los libros de texto.

Partiendo, como en los capítulos anteriores, de que los problemas reales del cálculo integral no se abordan ni en la educación secundaria obligatoria ni en el Bachillerato, sino en la universidad. Si bien es cierto, que esta educación tiene la responsabilidad de sembrar el germen de concepto de integral. Por tanto, el objetivo en esta fase, será asociar la integral con el cálculo de la medida de las variaciones entre magnitudes.

Teniendo como meta el fin marcado en el párrafo anterior, se establece una secuencia de ideas fundamentales que el alumno debe integrar en las fases anteriores de su educación. Estas ideas son las que se extraerán a través de ejercicios, problemas y cuestiones tipo de libros de texto para intentar visualizar de forma global, el marco en el cual el estudiante se encuentra cuando se enfrenta con el tema de la integración.

La segunda parte de este trabajo se centrará en segundo de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología, por lo que se ha decidido analizar los libros de los dos cursos anteriores tanto por la rama de letras como por la de ciencias y el libro del mismo nivel en la vía de Ciencias Aplicadas a las Ciencias Sociales.

El estudio se centra en actividades cuyo objetivo es el desarrollo, asentamiento o profundización de conceptos relacionados con:

- Imagen y medida del área bajo un gráfico
- Estudio de máximos/ mínimos, intervalos, continuidad…
- Cálculo de límites
- Cálculo de derivadas

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO opción A

Para la realización de este estudio nos basamos en el libro de matemáticas 4ºESO opción A de la editorial McGrawHill desarrollado por Purificación Montesinos Comino, Alejandro Montesinos Matilla, Francisco González Díaz, y Begoña Martínez Elgarresta, edición 2008.

De este libro, los temas que nos interesa estudiar son: el tema 9. Funciones. Conceptos Generales y el tema 10. Funciones elementales. Ambos se desarrollan siguiendo el esquema básico propuesto en el libro (una doble página de presentación, seguido el desarrollo de la unidad, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos y ejercicios de repaso, curiosidades, desafíos…).

Por su situación de los temas (bloque de análisis) dentro del sumario puede interpretarse que temporalmente coincidirán con el fin del segundo trimestre o inicio del tercero.

El tema 9 se desarrolla en 15 páginas, contiene 7 ejemplos, 3 ejercicios resueltos y 39 actividades distribuidas entre ejercicios, problemas y cuestiones. Los objetivos de la unidad son conocer el concepto de función así como estudiar las características de las funciones (dominio, simetría, continuidad, monotonía, puntos de corte con los ejes de coordenadas).

El tema 10. Funciones Elementales, se desarrolla en 19 páginas, contiene 2 ejemplos, 2 ejercicios resueltos y 47 actividades distribuidas entre ejercicios, problemas y cuestiones. El objetivo del tema es conocer y estudiar las características de las funciones elementales.

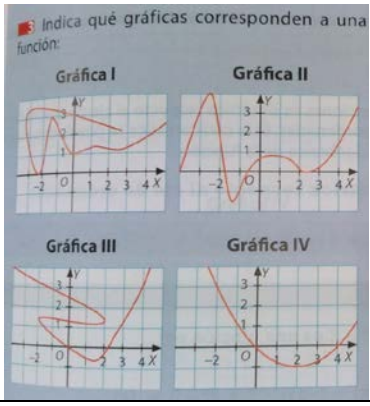
Como consecuencia del trabajo indirecto de interpretación gráfica, nos interesa el concepto de tasa de variación media de una función f definida en un intervalo [a, b] y su representación geométrica.

La tabla 9, pretende ser representativa del tipo de actividades propuestas y la tabla 10, representa un problema donde se relaciona el concepto de función con sus implicaciones en fenómenos físicos o naturales, económicos y sociológicos, que será el objetivo fundamental en las ciencias aplicadas.

Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Tras una explicación teórica del concepto de función, se proponen cuestiones para valorar la compresión del concepto y la distinción en gráficas representadas si se corresponden o no con funciones.

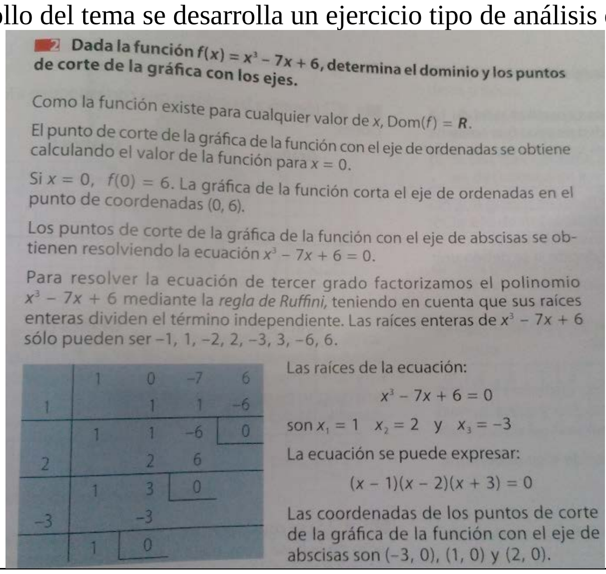
Ejemplo:



Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Tras el desarrollo del tema se desarrolla un ejercicio tipo de análisis de funciones

Ejemplo:



2 Dada la función $f(x) = x^3 - 7x + 6$, determina el dominio y los puntos de corte de la gráfica con los ejes.

Como la función existe para cualquier valor de x, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}$.

El punto de corte de la gráfica de la función con el eje de ordenadas se obtiene calculando el valor de la función para $x = 0$.

Si $x = 0$, $f(0) = 6$. La gráfica de la función corta el eje de ordenadas en el punto de coordenadas (0, 6).

Los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas se obtienen resolviendo la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Para resolver la ecuación de tercer grado factorizamos el polinomio $x^3 - 7x + 6$ mediante la *regla de Ruffini*, teniendo en cuenta que sus raíces enteras dividen el término independiente. Las raíces enteras de $x^3 - 7x + 6$ sólo pueden ser −1, 1, −2, 2, −3, 3, −6, 6.

	1	0	−7	6
1		1	1	−6
	1	1	−6	0
2		2	6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Las raíces de la ecuación:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

son $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ y $x_3 = -3$

La ecuación se puede expresar:

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

Las coordenadas de los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas son (−3, 0), (1, 0) y (2, 0).

Tabla 9.1 Actividades en el libro de 4ºESO opción A (Montesinos, 2008, pág 160-195

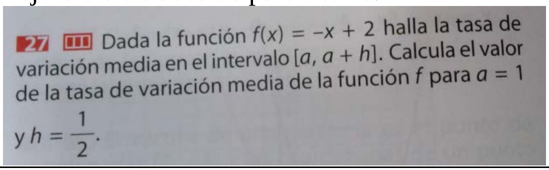
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Una vez entendido el concepto matemático, se propone en los ejercicios de profundización un ejercicio a través de parámetros.
Ejemplo:	 27 Dada la función $f(x) = -x + 2$ halla la tasa de variación media en el intervalo $[a, a + h]$. Calcula el valor de la tasa de variación media de la función f para $a = 1$ y $h = \frac{1}{2}$.

Tabla 9.2 Actividades en el libro de 4ºESO opción A (Montesinos, 2008, pág 160-195)

Por la singularidad de la actividad se añade otro cuadro con una actividad del mismo nivel educativo y libro, que presenta un formato diferente al resto de actividades propuestas a lo largo de los temas analizados.

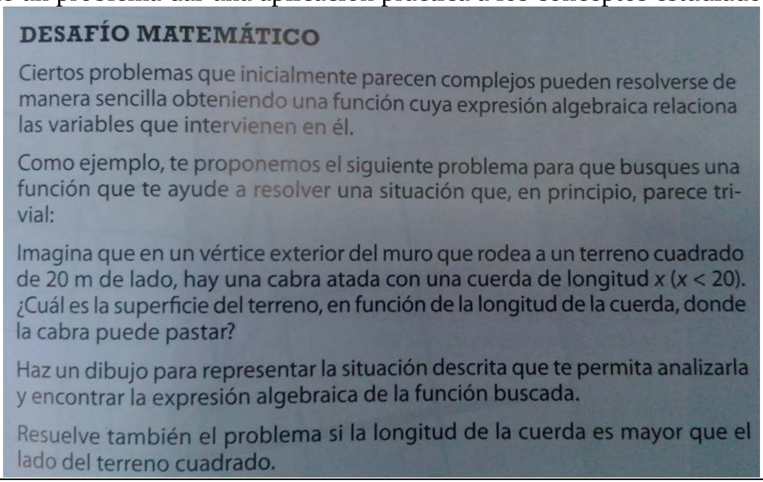
Act. tipo:	□Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Una vez concluido el tema, en el apartado de desafío matemático se pretende a través de un problema dar una aplicación práctica a los conceptos estudiados.
Ejemplo:	 **DESAFÍO MATEMÁTICO** Ciertos problemas que inicialmente parecen complejos pueden resolverse de manera sencilla obteniendo una función cuya expresión algebraica relaciona las variables que intervienen en él. Como ejemplo, te proponemos el siguiente problema para que busques una función que te ayude a resolver una situación que, en principio, parece trivial: Imagina que en un vértice exterior del muro que rodea a un terreno cuadrado de 20 m de lado, hay una cabra atada con una cuerda de longitud x ($x < 20$). ¿Cuál es la superficie del terreno, en función de la longitud de la cuerda, donde la cabra puede pastar? Haz un dibujo para representar la situación descrita que te permita analizarla y encontrar la expresión algebraica de la función buscada. Resuelve también el problema si la longitud de la cuerda es mayor que el lado del terreno cuadrado.

Tabla 10. Otras actividades reseñables del libro de 4ªESO opción A (Montesinos, 2008, pág 160-195)

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO opción B

Para la realización de este estudio nos basamos en el libro de matemáticas 4ºESO opción B de la editorial McGrawHill desarrollado por Purificación Montesinos Comino, Alejandro Montesinos Matilla, Francisco González Díaz, y Begoña Martínez Elgarresta, edición 2008.

De este libro, los temas que nos interesa estudiar son: el tema 9. Funciones. Conceptos Generales y el tema 10. Funciones elementales. Al ser un libro de la misma colección que el estudiado para la opción A, sigue el mismo esquema ya indicado: una doble página de presentación, seguido el desarrollo de la unidad, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos y ejercicios de repaso, curiosidades, desafíos…

El tema 9 se desarrolla en 15 páginas, contiene 7 ejemplos, 3 ejercicios resueltos y 39 actividades distribuidas entre ejercicios, problemas y cuestiones. Los objetivos de la unidad son conocer el concepto de función así como estudiar las características de las funciones (dominio, simetría, continuidad, monotonía, puntos de corte con los ejes de coordenadas). El desarrollo teórico es idéntico que en la opción A, y el 90% de los ejercicios son iguales en ambos libros, incrementando en esta opción los ejercicios de análisis de características.

El tema 10. Funciones Elementales, se desarrolla en 25 páginas, contiene 2 ejemplos, 2 ejercicios resueltos y 41 actividades distribuidas entre ejercicios, problemas y cuestiones. El objetivo del tema es conocer y estudiar las características de las funciones elementales. La diferencia con la modalidad A, es que aquí se estudian las funciones logarítmicas, la función definida por intervalos y composición de funciones. La tabla 11, pretende ser representativa del tipo de actividades propuestas.

Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Tras el estudio de diversas características que definen las funciones, se reta al alumno a que a través de diversos sea capaz de obtener una función acorde a los mismos.
Ejemplo:	26 II Dibuja en tu cuaderno de forma aproximada la gráfica de la función h cuyas características son las siguientes: a) $\mathrm{Dom}(h) = [-4, 4]$ b) La gráfica de la función es simétrica respecto al origen de coordenadas. c) Es discontinua en los puntos de abscisas $x = -2$ $x = 0$ $x = 2$ d) La función es constante en los intervalos $[-4, -2]$ y $(-2, 0)$. e) $h(-4) = 1$ $h(-1) = 5$ $h(0) = 3$
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	El tema pretende en este ejercicio de profundización amentar la dificultad a través del cálculo algebraico
Ejemplo:	30 II La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ corta los ejes en los puntos de coordenadas $(0, -12)$, $(4, 0)$ y $(-3, 0)$. Determina los valores de a, b y c.
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Tras la exposición de la teoría se solicita analizar analíticamente y gráficamente funciones
Ejemplo:	15 III Representa la gráfica y analiza las características de la función $f(x) = \|x^2 - x - 2\|$
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Las funciones a estudio, ya no tienen por qué ser continuas en un intervalo.
Ejemplo:	24 III Escribe la expresión algebraica y dibuja la gráfica de la función definida por intervalos sabiendo que: — En los valores menores que 0, la función es $f(x) = x^2 + 1$. — En el intervalo cerrado de extremos 0 y 4, la función es constante y continua en $x = 0$. — Para valores mayores que 4, la función es una recta de pendiente 1 y ordenada en el origen -1.

Tabla 11. Actividades en el libro de 4ºESO opción B (Montesinos, 2008, pág 160-194)

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato de Ciencias Sociales

Para la realización de este estudio nos basamos en el libro de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1º Bachillerato, editorial McGraw-Hill (J. Martínez, 2008). Como se estudió en el primer apartado, en primero de Bachillerato únicamente nos interesa el estudio de gráficas y funciones que se desarrollan en los temas 6, 7 y 8 de este libro. Principalmente nos vamos a centrar en el tema 6.Funciones y gráficas, que desarrolla las características de funciones así como sus trasformaciones o composiciones.

Frente al año anterior, se puede observar un incremento sustancial de conceptos matemáticos como la imagen o recorrido de una función, la idea de gráfica de una función, estudio de la continuidad o discontinuidad, la tendencia o introducción a las transformaciones elementales.

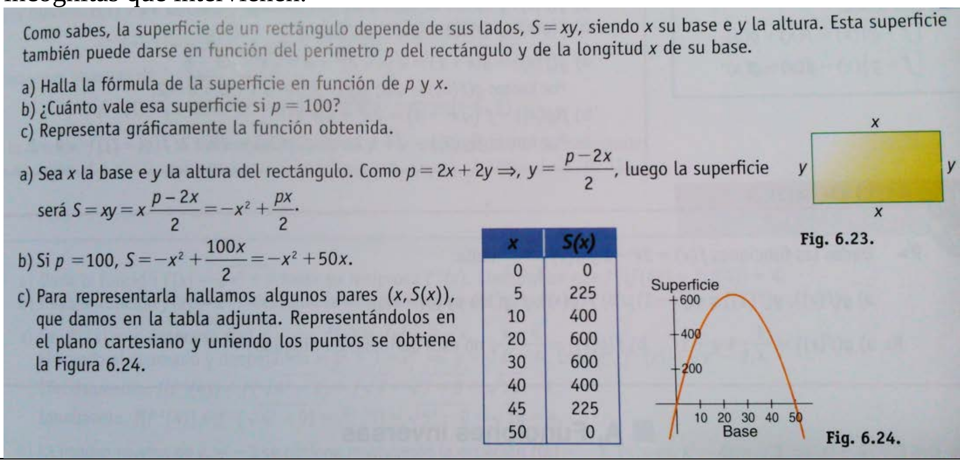
La unidad se desarrolla en 28 páginas donde se presentan 28 actividades resueltas, 11 actividades, 35 problemas, 10 cuestiones básicas y 2 cuestiones para investigar. El libro propone ejercicios o cuestiones extraídas de exámenes de PAU de años anteriores.

La unidad 7 se centra en la función polinómica y racional. El tema 8 en funciones exponenciales y logarítmicas, de este último nos interesa la aplicación de la función logística al estudio del crecimiento de poblaciones por la visión gráfica de la misma. Se adjuntan a continuación en la tabla 12 una relación de ejercicios tipo a desarrollar durante estos temas.

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Una vez se han expuestos las características matemáticas y se han realizado ejercicios aislados para el cálculo de las mismas, se procede a la resolución de problemas sencillos a través de una enunciado que establece la relación entre las distintas incógnitas que intervienen.

Ejemplo:



Como sabes, la superficie de un rectángulo depende de sus lados, $S = xy$, siendo x su base e y la altura. Esta superficie también puede darse en función del perímetro p del rectángulo y de la longitud x de su base.

a) Halla la fórmula de la superficie en función de p y x.
b) ¿Cuánto vale esa superficie si $p = 100$?
c) Representa gráficamente la función obtenida.

a) Sea x la base e y la altura del rectángulo. Como $p = 2x + 2y \Rightarrow$, $y = \frac{p-2x}{2}$, luego la superficie será $S = xy = x\frac{p-2x}{2} = -x^2 + \frac{px}{2}$.

b) Si $p = 100$, $S = -x^2 + \frac{100x}{2} = -x^2 + 50x$.

c) Para representarla hallamos algunos pares $(x, S(x))$, que damos en la tabla adjunta. Representándolos en el plano cartesiano y uniendo los puntos se obtiene la Figura 6.24.

x	$S(x)$
0	0
5	225
10	400
20	600
30	600
40	400
45	225
50	0

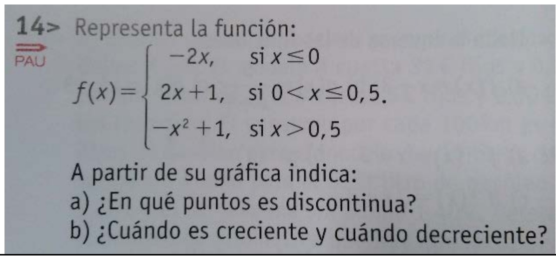
Fig. 6.23.

Fig. 6.24.

Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Análisis de funciones definidas a tramos nivel PAU

Ejemplo:



14> Representa la función:

PAU

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1, & \text{si } 0 < x \le 0,5 \\ -x^2+1, & \text{si } x > 0,5 \end{cases}.$$

A partir de su gráfica indica:
a) ¿En qué puntos es discontinua?
b) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?

Tabla 12.1 Actividades en el libro de 1º Bachillerato Ciencias Sociales
(J. Martínez, 2008, pág 115-186)

Act. tipo:	□Ejercicio	■Problema	□Cuestión	□Situación
Descripción:	Resolución de problemas donde se hace uso de conocimientos geométricos anteriores y se integran con el análisis gráfico.			
Ejemplo:	**33>** Se quiere construir una caja partiendo de un trozo de cartulina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadradito en cada esquina y doblando. a) Determina la función que da el volumen de la caja dependiendo del lado del cuadrado cortado. b) ¿Qué volumen tendrá la caja cuando cortamos 0, 5 y 10 cm? c) Representa dicha función. A partir de su gráfica, determina su dominio, recorrido y máximo.			

Tabla 12. Actividades en el libro de 1º Bachillerato Ciencias Sociales
(J. Martínez, 2008, pág 115-186)

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato de Ciencias Sociales

Para no perder la continuidad con el anterior punto, se estudia el libro de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato, editorial McGraw-Hill (Cañada, 2009). De este libro nos interesa todo el bloque de análisis que se conforma de los temas 5. Funciones, el tema 6. Límites y continuidad. Tema 7 derivadas. Aplicaciones de las derivadas, el tema 8. Representación gráfica de funciones. Y la unidad 9. Integral, Área bajo una curva.

Si comparamos los temas con los contenidos mínimos que exigía el currículo podemos observar como este manual está por encima del mismo al iniciar el estudio del concepto de integral.

El tema 5. Funciones, es un repaso al temario estudiado en el curso anterior. El tema 6.Límites y continuidad se desarrolla en continuación al estudio analítico de funciones para el cálculo de asíntotas, tanto horizontales como verticales. Así como para el estudio de discontinuidades. También plantea la resolución de algunas indeterminaciones tipo.

El tema 7. Derivadas. Aplicaciones de las derivadas, desarrolla la derivada como función estableciendo el cálculo de las mismas a través del método directo (funciones elementales) o mediante la Regla de la Cadena. Se desarrolla la misma con la aplicación del cálculo de máximos y mínimos, puntos de inflexión, cálculo de la recta tangente a una función en un punto. Al final del tema un apartado se dedica a la resolución de problemas de optimización.

El tema 8 Representación Gráfica de Funciones. Pretende a través de los conocimientos estudiados anteriormente en análisis, complementado con los instrumentos matemáticos de límite y derivada, ser capaz de la representación gráfica de una función polinómica o racional.

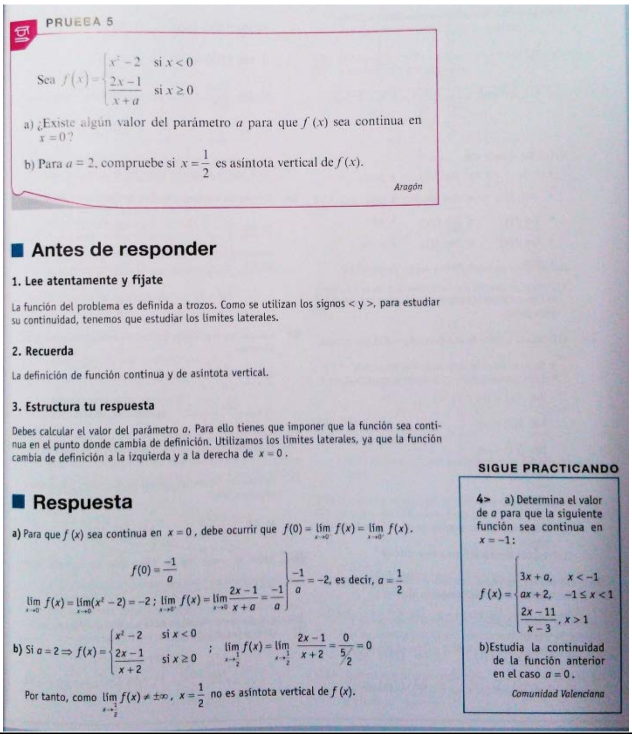
Tema 9. Integral. Área bajo una curva. Se inicia con el estudio de la integral indefinida como una primitiva de la función dada. Se calculan integrales inmediatas así como integración por partes o cambio de variable sencillos. Posteriormente se establece a través del Teorema del Valor Medio, el Teorema Fundamental del Cálculo Integral y la Regla de Barrow, la integral definida y su aplicación para el cálculo de áreas bajo una curva o entre dos curvas.

Tras el desarrollo de cada tema, el libro presenta varios ejercicios tipo de pruebas de acceso a la universidad (PAU) con diversas llamadas de atención así como indicación de errores tipo. Algunos de estos ejercicios se recogen en la tabla 13 como ejemplos de actividades desarrolladas en este nivel.

Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Calculo de parámetros que permitan a una función dada cumplir una serie de características.

Ejemplo:



PRUEBA 5

Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x-1}{x+a} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para que $f(x)$ sea continua en $x=0$?

b) Para $a=2$, compruebe si $x=\frac{1}{2}$ es asíntota vertical de $f(x)$.

Aragón

Antes de responder

1. Lee atentamente y fíjate

La función del problema es definida a trozos. Como se utilizan los signos < y >, para estudiar su continuidad, tenemos que estudiar los límites laterales.

2. Recuerda

La definición de función continua y de asíntota vertical.

3. Estructura tu respuesta

Debes calcular el valor del parámetro a. Para ello tienes que imponer que la función sea continua en el punto donde cambia de definición. Utilizamos los límites laterales, ya que la función cambia de definición a la izquierda y a la derecha de $x=0$.

Respuesta

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, debe ocurrir que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0)=\frac{-1}{a}$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{x+a}=\frac{-1}{a}$ $\Big\}$ $\frac{-1}{a}=-2$, es decir, $a=\frac{1}{2}$

b) Si $a=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x-1}{x+2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$; $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x+2}=\frac{0}{5/2}=0$

Por tanto, como $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)\neq\pm\infty$, $x=\frac{1}{2}$ no es asíntota vertical de $f(x)$.

SIGUE PRACTICANDO

4> a) Determina el valor de a para que la siguiente función sea continua en $x=-1$:

$f(x)=\begin{cases} 3x+a, & x<-1 \\ ax+2, & -1\leq x<1 \\ \dfrac{2x-11}{x-3}, & x>1 \end{cases}$

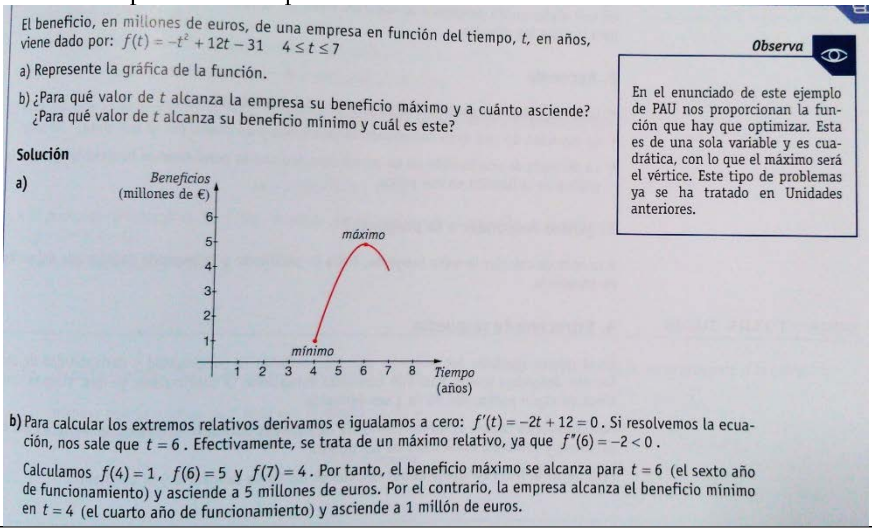
b) Estudia la continuidad de la función anterior en el caso $a=0$.

Comunidad Valenciana

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Problema de optimización tipo de PAU

Ejemplo:



El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo, t, en años, viene dado por: $f(t)=-t^2+12t-31 \quad 4\leq t\leq 7$

a) Represente la gráfica de la función.

b) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es este?

Solución

a)

b) Para calcular los extremos relativos derivamos e igualamos a cero: $f'(t)=-2t+12=0$. Si resolvemos la ecuación, nos sale que $t=6$. Efectivamente, se trata de un máximo relativo, ya que $f''(6)=-2<0$.

Calculamos $f(4)=1$, $f(6)=5$ y $f(7)=4$. Por tanto, el beneficio máximo se alcanza para $t=6$ (el sexto año de funcionamiento) y asciende a 5 millones de euros. Por el contrario, la empresa alcanza el beneficio mínimo en $t=4$ (el cuarto año de funcionamiento) y asciende a 1 millón de euros.

Observa

En el enunciado de este ejemplo de PAU nos proporcionan la función que hay que optimizar. Esta es de una sola variable y es cuadrática, con lo que el máximo será el vértice. Este tipo de problemas ya se ha tratado en Unidades anteriores.

Tabla 13.1. Actividades en el libro de 2º Bachillerato Ciencias Sociales
(Cañada, 2009, pág 149-251)

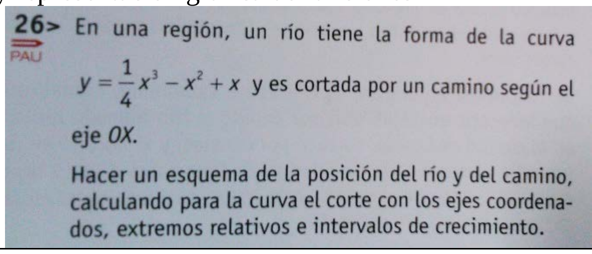
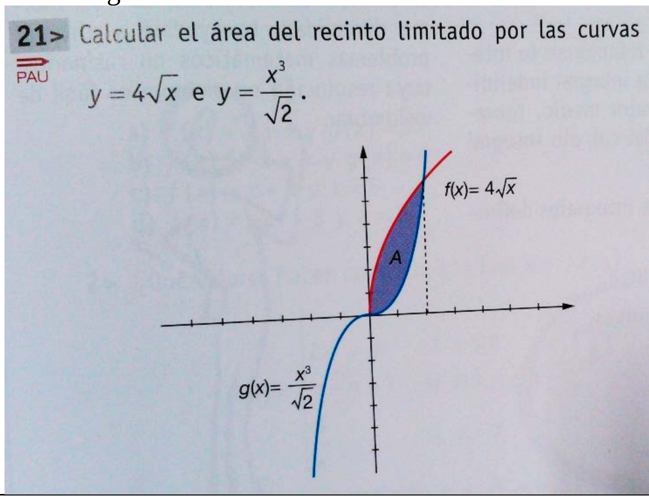
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Interpretación y representación gráfica de funciones
Ejemplo:	 26> PAU En una región, un río tiene la forma de la curva $y=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ y es cortada por un camino según el eje *OX*. Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Aplicación de la herramienta de integración para el cálculo de un área limitada por dos curvas dadas. Integral definida
Ejemplo:	 21> PAU Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y=4\sqrt{x}$ e $y=\frac{x^3}{\sqrt{2}}$.

Tabla 13.2. Actividades en el libro de 2º Bachillerato Ciencias Sociales
(Cañada, 2009, pág 149-251)

3.5 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

Para el estudio de este curso se ha optado por el libro de la editorial Oxford University Press de Bescos y Pena dentro de la colección Tesela. De los contenidos de este libro nos centraremos principalmente en el bloque de análisis aunque se desarrollan temas de geometría analítica en el plano que serán claves para el desarrollo visual de grafos.

El bloque de análisis se desarrolla en 4 temas que corresponden literalmente con los contenidos establecidos en el currículo (ver tabla en el capítulo 1 de este documento). El tema 8. Funciones, repasa los conceptos estudiados en la secundaria introduciendo las trasformaciones a partir de funciones elementales.

El tema 9 desarrolla la idea intuitiva de límite de una sucesión y su aplicación en el estudio de las propiedades de funciones. El tema 10. Función exponencial, logarítmica y trigonométricas, estudia las características de estas tipologías para su posterior uso en resolución de problemas.

Tema 11. Derivadas, a través del concepto matemático ya conocido, tasa de variación media, se introduce la tasa de variación instantánea que da lugar al concepto de derivada. Se calculan derivadas directas así como el uso de la Regla de la Cadena. Posteriormente se desarrollan aplicaciones de la misma para el cálculo de tangentes o representación gráfica de funciones.

Una gran deficiencia de este libre frente a los dos libros anteriormente analizados de Bachillerato, es que no se observa ninguna referencia a la prueba de acceso a la selectividad (PAU) ni se muestran ejercicios tipo de la misma.

En la tabla 14 se presenta un extracto de ejercicios característicos de cada tema anteriormente indicado.

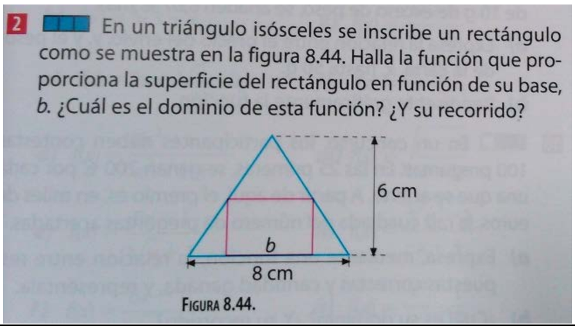
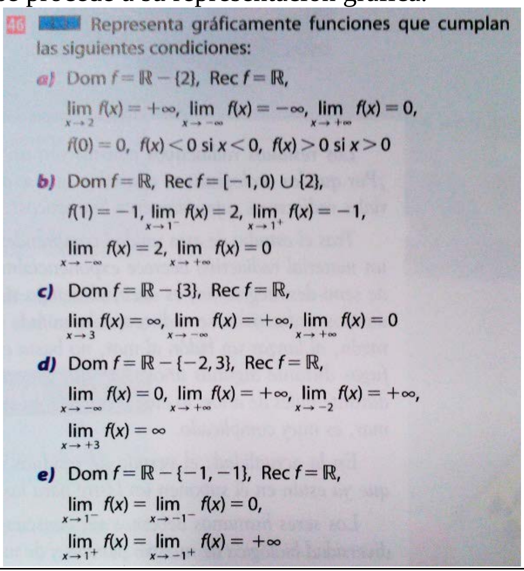
Act. tipo:	□Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	El problema requiere la modelización de una situación real mediante una función. El problema se plantea una vez repasados todos los conocimientos de análisis estudiados en el ciclo de secundaria.
Ejemplo:	 2 En un triángulo isósceles se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura 8.44. Halla la función que proporciona la superficie del rectángulo en función de su base, b. ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Y su recorrido? FIGURA 8.44.
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Tras introducir del concepto matemático del límite y su aplicación para el estudio de la continuidad se procede a su representación gráfica.
Ejemplo:	 46 Representa gráficamente funciones que cumplan las siguientes condiciones: **a)** $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$, $f(x) < 0 \text{ si } x < 0$, $f(x) > 0 \text{ si } x > 0$ **b)** $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, 0) \cup \{2\}$, $f(1) = -1$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **c)** $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +3} f(x) = \infty$ **e)** $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, -1\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

Tabla 14. Actividades en el libro de 1º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnología (Bescós, 2009, pág 184-301)

Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Estudio de la función a través de la herramienta del límite

Ejemplo:

5. Determinar los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua y derivable en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a & \text{si } x\le 0 \\ 3x^2+bx & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Debemos imponer que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

■ En primer lugar se debe imponer que sea continua:

- $f(0) = a$
- ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+3x+a) = a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x^2+bx) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow a = 0$$

- $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

■ Ahora impondremos que sea derivable:

- $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+3) = 3$
- $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2+bh}{h} = \lim_{h\to 0^-} (3h+b) = b$

Los límites laterales deben ser iguales: $f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow b = 3$

Para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio los valores de los parámetros deberán ser $a = 0$ y $b = 3$.

Act. tipo: ■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación

Descripción: Aplicación de la nueva herramienta matemática estudiada, la derivada, para el análisis de funciones.

Ejemplo:

La función $f(x)$ es racional. Su dominio es Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Tiene derivada en todos los puntos de su dominio. Sus extremos relativos, es decir, sus máximos y mínimos, se deben hallar entre los puntos de tangente horizontal, esto es, de derivada nula, en los que cambie la monotonía de la función: si es un máximo, la función pasará de creciente a decreciente y, si es un mínimo, sucederá lo contrario.

En primer lugar, averiguamos en qué puntos se anula la derivada: $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 3$$

Estudiamos ahora el signo de la función derivada en los intervalos que estos valores determinan en la función (teniendo en cuenta que en $x = 1$ no está definida): si $f' > 0$ en un intervalo, es creciente en dicho intervalo y, si $f' < 0$, entonces es decreciente.

Los intervalos que debemos considerar son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Tomamos $x = -2 \in (-\infty, -1)$:

$f'(-2) = 5/9 > 0$, luego $f' > 0$ en $(-\infty, -1) \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

Tomamos $x = 0 \in (-1, 1)$:

$f'(0) = -3 < 0$, luego $f' < 0$ en $(-1, 1) \Rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 1)$.

Tomamos $x = 2 \in (1, 3)$:

$f'(2) = -3 < 0$, luego $f' < 0$ en $(1, 3) \Rightarrow f$ es decreciente en $(1, 3)$.

Tomamos $x = 4 \in (3, +\infty)$:

$f'(4) = 5/9 > 0$, luego $f' > 0$ en $(3, +\infty) \Rightarrow f$ es creciente en $(3, +\infty)$.

Es útil recoger esta información en un cuadro:

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Con esto podemos deducir que en $x = -1$ la función pasa de ser creciente a decreciente, luego tiene un máximo relativo; y en $x = 3$ la función pasa de ser decreciente a creciente, luego tiene un mínimo relativo.

Tabla 14. Actividades en el libro de 1º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnología (Bescós, 2009, pág 184-301)

3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

El análisis de este curso se realiza a través del texto editado por Sahats en 2010 (R. Munsuri) para el centro concreto donde se imparte, por tanto, no es un libro comercial en sí mismo, sino una recopilación de apuntes por parte del profesorado que pretende ser una herramienta práctica y sistemática de los conceptos exigidos en este nivel educativo.

El tema de estudio, la integración, se localiza como el último tema del manual, precedido por la derivación y estudio de límites, ambos conceptos se han establecido como herramientas útiles para el análisis de funciones reales de parámetros reales.

El tema se desarrolla en 42 páginas, dedicadas las 30 primeras a la resolución de ejercicios que se intercalan con los conceptos básicos de teoría, siendo el resto del tema una batería de ejercicios propuestos. El profesor facilita como complemento del manual un dossier con las respuestas a los ejercicios (se adjunta como anexo B)

El tema comienza introduciendo la integral indefinida como primitiva de una función. Se establece a continuación una serie de reglas básicas de integración (integrales inmediatas, cambio de variable, integración por partes e integrales racionales). Posteriormente a través de la Regla de Barrow se define la integral definida así como la interpretación gráfica de la misma, para finalmente desarrollar dos aplicaciones de la misma (cálculo de áreas y volúmenes).

Frente al esquema anteriormente visto en los manuales al uso, este manual no desarrolla unos conceptos teóricos y luego establece aplicaciones de los mismos. Sino que directamente se propone la resolución de diversos ejercicios en los cuales se desarrollan/ explican los conocimientos matemáticos intervinientes.

El manual está muy dirigido a ser una herramienta de trabajo que permita en el menor tiempo posible crear una mecanización dinámica de la resolución del tipo de ejercicios requeridos en la prueba de acceso a la selectividad (PAU). Este carácter se manifiesta en la tipología de ejercicios, que en la mayoría de los casos son extractos de exámenes de dicha prueba en años anteriores. En la tabla 15 se recoge una selección de los ejercicios representativos que se proponen en el manual.

Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Para el análisis de funciones, nos basamos en diversas herramientas matemáticas que se han desarrollado en el tema. Dicho análisis nos permitirá obtener datos característicos que nos facilitan la representación gráfica de la misma.
Ejemplo:	75.-Halla a y b para que $f(x)=\begin{cases} Lnx-1 & si \quad x>1 \\ 2x^2+ax+b & si \quad x\leq 1 \end{cases}$ sea continua en x=1 y pase por el origen de coordenadas. Estudia la derivabilidad en x=1.
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Se introduce la integral indefinida como antiderivada. Se establecen diversos métodos de cálculo y se propone cálculo de integrales a partir de los mismos.
Ejemplo:	2.-Calcula: $a)\int\frac{dx}{\sqrt{7x-2}}$ $b)\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ $c)\int\frac{e^x+senx}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx$ $d)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$ $e)\int\frac{2senx}{\cos^5 x}dx$ $f)\int\frac{2x\,dx}{1+\sqrt{x}}$ $g)\int\frac{dx}{senx\cos x}$ $h)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ $i)\int\cos^5 x\,dx$ $j)\int tg(x/2)\ \sec^2(x/2)\,dx$ $k)\int x\sqrt{5x^2+1}\,dx$ $l)\int x\sqrt{x-1}\,dx$ $m)\int sen^2x\ \cos x\,dx$ $n)\int\frac{dx}{(x-1)^2}$ $o)\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Tabla 15.1. Actividades en el libro de 2º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnología (R. Munsuri, 2010, pág 161-272)

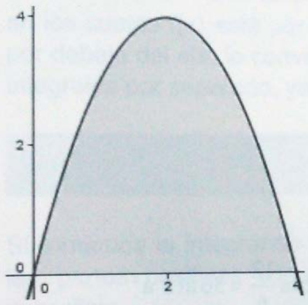
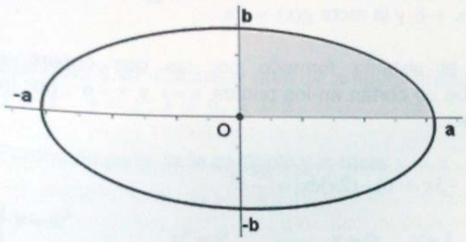
<table>
<tr><td>Act. tipo:</td><td>■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td>Introducida la Regla de Barrow nos basamos en la misma para el cálculo de integrales definidas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td>6.-Aplica la regla de Barrow y calcula:
a) $\int_1^2 (x^2+x+1)dx$ b) $\int_0^\pi sen(x)dx$ c) $\int_1^2 x\ln(x)dx$
d) $\int_{-\pi}^{\pi} xsen(x)dx$ e) $\int_0^{2\pi} \frac{sen(x)}{1+\cos(x)}dx$ f) $\int_3^6 \frac{x}{x-1}dx$
g) $\int_1^3 \frac{x-3}{x}dx$ h) $\int_0^\pi e^x sen(x)dx$</td></tr>
<tr><td>Act. tipo:</td><td>■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td>Una vez estudiada la integral definida se aplica para el cálculo de áreas encerrada bajo una curva, o entre diversas funciones</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td>Ejercicio 8.1.- Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.
Dibujamos la gráfica:

Entonces, tenemos en cuenta que tenemos que calcular la integral de $f(x)=4x-x^2$ en el intervalo $[0,2]$.
Área= $\int_0^2 (4x-x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{32}{3}\ u^2$</td></tr>
<tr><td>Act. tipo:</td><td>■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación</td></tr>
<tr><td>Descripción:</td><td>Los conocimientos previos de geometría nos permiten a travеés de la división de figuras en superficies limitadas por funciones, calcular la superficie de figuras regladas.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:</td><td>Ejercicio 8.6.-Calcula el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Por tanto si calculamos la integral de f(x) en [0,a] y lo multiplicamos por cuatro y habremos calculado el área de la elipse.</td></tr>
</table>

Tabla 15.2. Actividades en el libro de 2º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnología (R. Munsuri, 2010, pág 161-272)

Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Descripción:	Una vez que somos capaces de calcular áreas mediante integración incrementamos la aplicación para calcular volúmenes de revolución
Ejemplo:	**Ejercicio 9.4**.- Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$. Resolvemos el sistema formado por las dos curvas y vemos que se cortan en $x = 1$ y en $x = 2$, por lo que: $V = \pi \int_1^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(-x + 2\right)^2 \right] dx =$ $\pi \int_1^2 \left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 \right) dx =$

Tabla 15.3. Actividades en el libro de 2º Bachillerato Ciencias de la Salud y Tecnología (R. Munsuri, 2010, pág 161-272)

Capítulo 4
Coherencia entre el currículo y los libros de texto analizados

Tras estudiar en los capítulos anteriores tanto el currículo vigente como los conceptos desarrollados en los libros de texto, en este último capítulo se pretende unificar, comparar y analizar la información obtenida de ambas fuentes.

1.1.Ausencia y presencias en el currículo y en los libros de texto

Se irá curso por curso estableciendo una relación entre los contenidos indicados en el currículo y los desarrollados en el libro de texto de referencia. Tal y como se ha realizado en los capítulos anteriores, para secundaría analizaremos los bloques de geometría y análisis mientras que en Bachillerato sólo nos interesará el estudio de este último bloque.

4º ESO opción A respecto al bloque de análisis el libro no sólo se queda en el estudio de tablas y graficas sino que desarrolla una serie de conceptos matemáticos (dominio, simetría, continuidad, monotonía, cortes con los ejes de coordenadas) que permiten un mayor estudio de los fenómenos físicos o naturales, económicos y sociales, para obtener información sobre su comportamiento. Dentro de las funciones elementales se desarrolla la función lineal, la función afín, cuadrática, de proporcionalidad inversa, función exponencial y la Tasa de variación media, no hay especificaciones respecto a estos conceptos en el currículo.

Respecto al bloque de geometría. Se desarrolla un primer tema de semejanza de polígonos. Se inicia con la razón de semejanza y el Teorema de Tales para posteriormente utilizar estos conceptos en polígonos, así como para comparar áreas y volúmenes de polígonos semejantes. Finalmente se introduce la escala con su utilidad para planos, mapas y maquetas. Es evidente que el temario está muy por encima de lo solicita en el currículo que se queda en la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras. Respecto a este último, hay que indicar que no hay ningún apartado para su explicación o desarrollo no obstante se utiliza y nombra de forma continuada para la resolución de problemas de triángulos.

Posteriormente se desarrollan dos temas, trigonometría y geometría analítica en el plano que permite la resolución efectiva de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana tal como solicita el currículo.

En la modalidad B, el bloque de análisis se desarrolla de forma similar a la descrita anteriormente, se estudia semejanza, trigonometría y geometría analítica que cumple la ambigüedad que presenta el currículo en este punto ya que indica *:"Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes*" Frente a lo que ocurría en la modalidad A, la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes, entra dentro de las especificaciones del currículo.

En el bloque de análisis, se estudian las funciones definidas a trozos, la función lineal, afín, cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica y sus aplicaciones a contextos y situaciones reales como se indica en currículo. Se amplía el temario con la Tasa de Variación Media (también se estudia en la modalidad A fuera de currículo) y la Composición de Funciones.

En ninguna de las dos modalidades se han visto uso de tecnologías para la representación de funciones como actividades propias del libro, no obstante, hay multitud de enlaces a la web de descartes para la realización de actividades interactivas. También se aprecian diversas actividades para el manejo de la calculadora, que permitan facilitar el cálculo numérico y algebraico, especialmente en trigonometría.

Si estudiamos ahora la vía de Ciencias Aplicadas a las Ciencias Sociales. En análisis de funciones se estudia la función real de variable real (funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) como solicita el currículo, pero no únicamente se limita a su identificación sino que estudia características de las mismas como: el dominio, recorrido, extremos, estudio de crecimiento y decrecimiento a través de máximos y mínimos, continuidad o discontinuidad, simetrías, periodos, la tasa de variación media, tendencias, composición de funciones y transformaciones de manera que nos permiten una interpretación y análisis mucho más exhaustivo.

Respecto a los conceptos matemáticos de límite y derivada, este libro desarrolla la teoría básica así como aplicaciones del mismo por lo que podemos indicar que supera la ida de aproximación que solicita el currículo.

En segundo, el análisis comienza con el repaso de función, función real de variable real, operaciones con funciones (composición, función inversa), se recuerdan también características como los puntos de corte con los ejes, las funciones acotadas y la monotonía (máximos, mínimos relativos) para contextualizar la representación gráfica de funciones que es el objetivo establecido en currículo. Respecto a la representación, en sí misma, no sólo se estudia la función polinómica, sino que estudia la representación gráfica de las principales familias de funciones (potenciales, proporcionalidad inversa, irracional, exponencial, logarítmica, definida a trozos y valor absoluto) mostrando sucesivos ejemplos y ejercicios tipo resueltos.

El tema de límites se establece como marca el currículo a través de la tendencia de una función. Se estudian los límites laterales, laterales infinitos (asíntota vertical), limite en el infinito (asíntota horizontal) y la continuidad en un punto así como en un intervalo. Se introduce también un apartado para el cálculo de indeterminaciones del tipo: ∞-∞, ±∞*0,$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}\ y\ \infty^{0}$

El tema siguiente, se dedica a la derivada, comenzando según currículo con la derivada de una función en un punto, las consecuencias de la definición y la interpretación geométrica de la misma.

Fuera de currículo generaliza el término estableciendo el concepto de función derivada y el cálculo de las sucesivas derivadas a través de las reglas de derivación. Se distingue entre funciones elementales y las reglas de derivación para operaciones (suma de funciones, producto de una función por un número, producto de dos funciones, cociente, y función compuesta).

El manual, dentro de las aplicaciones estudia el crecimiento y decrecimiento de funciones y puntos de inflexión; así como la resolución de problemas de optimización. Todo esto según establece currículo, incrementando las aplicaciones al cálculo de la recta tangente a una curva.

Posteriormente, se presenta un tema de representación gráfica de funciones apoyándose en los nuevos conceptos estudiados (límites y derivadas). Y termina el bloque de análisis con el tema de la integral, desarrollando todos los conceptos que corresponden al Bachillerato de Ciencias (Integral indefinida, métodos de integración y aplicaciones).

Como cierre de bloque propone dos actividades una con el programa Graph y otra con el WIRIS para la representación gráfica de funciones.

Por último, estudiamos la vía de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología. En el primer curso, si nos centramos en el análisis de funciones, se estudian las características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Se desarrollan los conceptos de dominio, recorrido y extremos de una función según currículo y se amplía con características como signo, monotonía, simétrica, periodicidad, acotación.

Se estudian operaciones con funciones (adición, multiplicación, división y composición), la función inversa respecto de la composición de funciones y transformaciones elementales (desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal, dilatación o contracción vertical, dilatación o contracción horizontal).

Siguiendo currículo se analizan e interpretan funciones expresadas de manera analítica. Para finalizar el bloque de análisis, respecto al concepto de límite y derivada, este manual no solo establece una aproximación inicial como establece el currículo sino que desarrolla un tema completo por concepto he introduce más aplicaciones de las establecidas en el currículo. Por ejemplo para las derivadas establece como aplicaciones extracurriculares el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto y el cálculo de monotonía en intervalos (además del cálculo de extremos establecido por currículo).

El bloque de geometría sigue los conceptos indicados en currículo (trigonometría, geometría analítica, lugares geométricos y cónicas) Se amplía el temario en el uso de numero complejos para la resolución de razones trigonométricas. Y en geometría analítica no solo se trabaja con rectas como indica el currículo sino que también se utiliza el plano.

El manual de segundo curso, cumple estrictamente el currículo respecto a las peticiones de currículo para geometría analítica en el tema 5. Rectas y planos en el espacio.

En el tema 6. Funciones, basándose en el concepto de límite estudia la continuidad según se solicita en currículo así como repaso las características de las funciones reales estudiadas en cursos anteriores. También se introduce la interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto y el cálculo de las mismas.

Se desarrolla el teorema de Bolzano, de Rolle y del Valor Medio así como aplicaciones para el estudio de propiedades locales.

Finalmente el tema 8, introduce el concepto de integral, cálculo de primitivas, concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva y su aplicación al cálculo de áreas de regiones planas. Por lo que este libro/ manual cumple estrictamente los contenidos de currículo.

1.2.Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Como hemos desarrollado en el punto anterior, podemos concluir que los manuales, estudiados, cumplen con los contenidos de currículo. Si bien es cierto, hemos constatado que hay una gran diferencia entre el manual comercial, ya no solo por su presentación y riqueza gráfica y referencial, sino que presenta un contenido superior al exigido normativamente adelantándose a contenidos de cursos posteriores.

Especialmente, el material analizado de la editorial McGrawHill para la vía de Ciencias Sociales (tanto en Secundaria como en Bachillerato) presenta un volumen de contenidos mucho mayor que el establecido legalmente, mostrando un claro acercamiento hacía el temario de Ciencias de la Salud y Tecnología o modalidad B en Secundaria. Este gesto se puede entender como una manera desde la editorial de minimizar el salto entre una vía y otra facilitando un cambio de orientación por parte del alumnado.

El manual examinado para segundo de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología, ya hemos comentado que no es un manual comercial al uso, sino que era un manual específico del centro conformado por el propio profesor de la asignatura. Este hecho, condiciona el contenido del mismo ya que es una herramienta adaptada a la tipología de enseñanza del centro (distancia) como alumnado (adulto), que requieren de una mayor eficacia en los recursos temporales disponibles. Estas razones obligan a ceñirse a los conceptos y criterios que permiten la obtención del título, por lo que más que un manual matemático nos encontramos con una herramienta de trabajo, y como tal debe entenderse.

Respecto a la tipología de las actividades propuestas, se ha visto un importante volumen de ejercicios frente a otras tipologías propuestas, no obstante, este aspecto puede deberse en gran medida, en que los temas analizados pertenecen al bloque de análisis. Aunque es una crítica generalizada de todos los manuales estudiados, se debe indicar, que otros bloques, especialmente estadística probabilidad e incluso geometría presentan un volumen muy similar de problemas y ejercicios habiendo incluso supremacía de los primeros.

De forma general, en los manuales analizados se muestra una ausencia generalizada de cuestiones, quedando estas como meras preguntas abiertas en la introducción de los temas. No se ha encontrado ninguna propuesta de situación.

Fuera de currículo, en el libro de 1º Bachillerato de Ciencias Aplicadas, se ha encontrado un tema entero dedicado a la resolución de problemas que pretende establecer una disposición al aprendizaje más positiva.

Partiendo de la cita de Mason, Burton y Stacey en su libro *Pensar matemáticamente* que afirma: “Posiblemente, la lección más importante que hay que aprender es la de que estar atascado o bloqueado en un problema es una situación muy digna, que constituye, además, una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento” establecen tres fases que permiten al alumno establecer su nivel de conocimiento matemático frente a una situación, establecer un modo de actuación y actuar con la resolución y critica posterior del mismo.

Este material, me parece que aun estando fuera del ámbito matemático propiamente dicho, constituye un material fundamental para cambiar la actitud de un alumno, que generalmente (por la vía de estudio elegida) presenta a priori una negación hacia las matemáticas como materia. Como docentes, trabajar este ámbito es tan fundamental como la exposición de los conceptos en sí misma, ya que necesitamos captar la atención e interés del alumnado.

Otro apartado, que llama notablemente la atención, es el encontrado en el manual para Ciencias aplicadas, esta vez de segundo, el cual comienza con un apartado con consideraciones sobre el examen de selectividad. No hay que olvidar, que esta prueba marca y determina toda la didáctica de Bachillerato, y especialmente de este segundo año donde el rendimiento y calificación final del alumno vendrá determinada por esta prueba externa. Razón por la cual, el alumnado se centra en obtener una serie de capacidades que le permitan la superación de la misma. Es un objetivo que puede utilizase para incentivar al alumnado pero que como docentes debemos ser cautos y no permitir la mecanización sistemática de la misma olvidando los contenidos que tras ella se pretenden calificar.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio sobre el concepto de integración en 2º de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de aprendizaje del concepto de integral en 2º de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En los dos primeros capítulos, se profundiza en el estudios de la integral en el libro de texto de referencia; Desarrollando en el primer capítulo los contenidos del tema, y en el siguiente, estableciendo los posibles errores y dificultades previsibles en el aprendizaje.

Posteriormente, en el capítulo penúltimo, se explica un proceso de estudio programado para un grupo de 2º de Bachillerato de un centro a distancia. Y finalmente, en el último capítulo, se desarrolla la experimentación de dicho proceso en el aula.

El objetivo será evaluar y valorar el proceso a partir de ciertos ejercicios realizados durante las prácticas.

Capítulo 5
La integración en el libro de texto de referencia

Tras el estudio en la primera parte del trabajo del "significado institucional de referencia" desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994: Godino Contreras y Font, 2007, en prensa) se pasa a valorar la idoneidad epistémica del proceso de instrucción planificado en el libro de texto de referencia.

En el centro donde se realizan las prácticas utilizan un manual editado por la editorial Sahats desarrollado por el propio profesor de la asignatura, Ramón Munsurí. Dicho manual será el material de estudio para esta parte del trabajo.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

Para el desarrollo de esta sección nos basamos en la ontología para describir objetos matemáticos involucrados en una lección que utilizan Godino, Font y Wilhelmi (2006) en el análisis realizado en el artículo Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

Este artículo estudia herramientas teóricas del enfoque onteosemiótico. Siguiendo este ejemplo, se desarrolla a continuación una serie de tablas que pretenden estudiar los objetos matemáticos involucrados: Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Situaciones y Propiedades.

En el lenguaje, distinguiremos entre verbal, gráfico y simbólico que se presenta en dicho manual para la descripción de las situaciones, conceptos, proposiciones…

Objeto matemático**: LENGUAJE**

Verbal	Integral indefinida: antiderivada o primitiva de una función, Integral definida Función: dominio, intervalo, continuidad, región limitada, gráfica. Constante Derivada, segunda derivada Límite Reglas básicas de integración: inmediatas, regla de la cadena, cambios de variable, integración por partes, racionales Polinomios: grado del polinomio, factorización, suma de fracciones simples, raíces reales, raíz múltiple, raíz compleja, división Igualdad de términos en una igualdad Geometría: curva, recta, circulo, elipse, áreas parciales, cuerpo de revolución, cilindro, esfera, cono.
Gráfico	Gráfica de funciones Representación gráfica de curvas
Simbólico	F´(x)= f(x) $\int f\,dx$; $\frac{dy}{dx}$ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\lim_{x\to\infty} 1/x$ Intervalos abiertos (a, b), semiabiertos (a, b] o [a,b) y cerrados [a,b] Símbolos generales: + - * Ln(x), sin(x), cos(x), tan(x), sec(x), arcsin(x), arccos(x), arctan(x), √x, e^x,$\|x\|$… etc.

Tabla 16. Análisis del lenguaje en el tema de integración

Objeto matemático: **CONCEPTOS**

Previos	Se considera concepto previo los conceptos tratados en los años anteriores especialmente los tratados en primer curso de Bachillerato, aunque posiblemente sea necesario recordar y volver a asimilar estos conceptos por parte del alumnado: Características fundamentales que permiten la interpretación de funciones reales de variable real Interpretación y representación de gráficas. Interpretación visual de área bajo una curva. Introducción al concepto de límite y aplicación en el estudio de la continuidad de una función Introducción al concepto de derivada y su aplicación en cálculo de extremos de una función. Geometría analítica del plano, distancia y relación de puntos, rectas y planos.
Emergentes	Integral indefinida Integral definida Teorema fundamental de integración. Regla de Barrow Reglas de integración Cálculo de áreas y volúmenes mediante integración

Tabla 17. Análisis de los conceptos intervinientes en el tema de integración

Objeto matemático: **SITUACIONES**

Contextualizadas	A partir de la regla de la cadena estudiada en el tema anterior para el cálculo de derivadas cuando existe un producto de funciones, se extiende la fórmula a la segunda derivada, a la tercera… y así sucesivamente extrayendo el método de integración por partes $\int u * v''' = u * v'' - u' * v' + u'' * v - \int v * u'''$
Descontextualizadas	Cálculo de integrales indefinidas Cálculo de integrales definidas Calculo de áreas limitadas por curvas o funciones Cálculo de volúmenes de revolución

Tabla 18. Análisis de las situaciones en contenidos de integración

Objeto matemático: **PROCEDIMIENTOS**

Cálculo de integrales inmediatas
Cálculo de integrales mediante cambio de variable
Cálculo de integrales a través de la Regla de la cadena
Cálculo de integrales definidas mediante la Regla de Barrow
Cálculo de áreas y volúmenes a través de integrales definidas

Tabla 19 Análisis de procedimientos en contenidos de integración

Objeto matemático: **PROPIEDADES**

La integración es el proceso inverso a la derivación. $\int f(x)\,dx = F(x) + C, siendo\ C\ una\ constante$

Una función tiene más de una primitiva, y todas ellas se diferencian en una constante

La integral de la suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones: $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

La integral de una constante que multiplica a una función es igual al producto de dicha constante por la integral de la función: $\int a * f(x)\,dx = a * \int f(x)\,dx$

Integrales inmediatas (se muestran las facilitadas por el manual de referencia):

$\int a\,dx = ax + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{Ln(a)} + C$	$\int \sec x^2\,dx = \tan x + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = Ln(x) + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \tan x\,dx = -Ln(\cos x) + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Regla de la Cadena para la derivación de funciones compuestas: *(f(g(x))´=f´(g(x))*g´(x)*

Regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Propiedades de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a), si\ F(x) es\ una\ primitiva\ de\ f(x)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x), si\ F(x) es\ una\ primitiva\ de\ f(x)$$

El área de una función viene dada mediante la siguiente expresión: $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

Área limitada por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ viene dada por la fórmula: $\left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\right|$

Tabla 20. Análisis de las propiedades utilizadas en el tema de integración

Objeto matemático: **ARGUMENTOS**

Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio:

$\exists c \in (x, x+h)$ tal que $\int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(c)$, luego

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h \cdot f(c)}{h} = f(x)$$

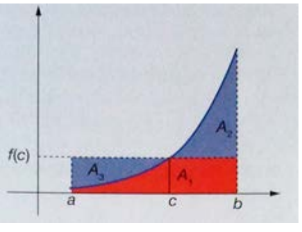


Figura 1. Interpretación grafica del Teorema del Valor Medio

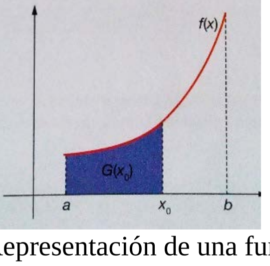


Figura 2. Representación de una función $f(x)$ creciente positiva.

Demostración de la Regla de Barrow

Dada $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y, sabiendo que la función integral $G(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$ es también otra primitiva de $f(x)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que: $G(x)=F(x)+C$

Para $x = a \Rightarrow G(a)=F(a)+C$

Por otra parte:

$$G(a)=\int_a^a f(t)\cdot dt = 0 \Rightarrow F(a)=-C$$

Para $x = b \Rightarrow G(b)=F(b)+C$

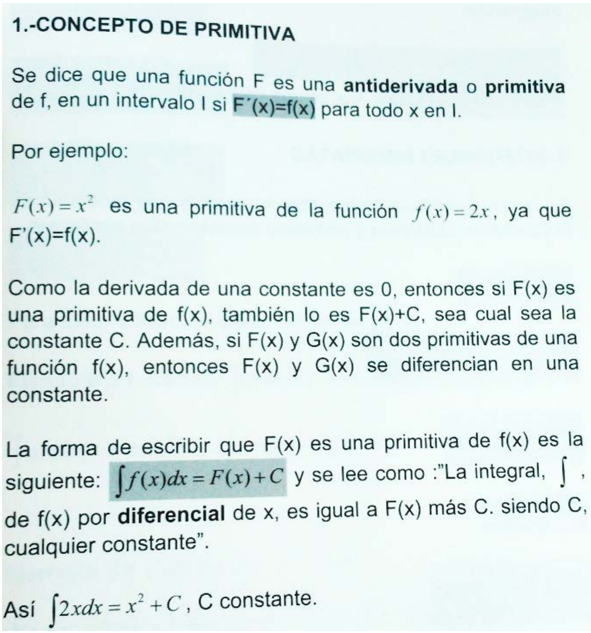
Por su parte:

$$G(b)=\int_a^b f(t)\cdot dt \Rightarrow \int_a^b f(t)\cdot dt = F(b)+C = F(b)-F(a)$$

Tabla 21: Análisis de los argumentos a través de los cuales se articula el tema de integración

Estos seis elementos se relacionan entre sí dando lugar al desarrollo del tema. El lenguaje será el conductor que expone los conceptos y actividades planteadas. La resolución de estas implica el conocimiento de las propiedades que argumentan los procedimientos seguidos en cada caso.

Los conceptos en el libro de referencia se manifiestas a través de definiciones/reglas que se justifican mediante la ejemplificación. Se adjunta como ejemplo el desarrollo del concepto de primitiva mostrado en el manual.



1.-CONCEPTO DE PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada** o **primitiva** de f, en un intervalo I si F´(x)=f(x) para todo x en I.

Por ejemplo:

$F(x)=x^2$ es una primitiva de la función $f(x)=2x$, ya que F'(x)=f(x).

Como la derivada de una constante es 0, entonces si F(x) es una primitiva de f(x), también lo es F(x)+C, sea cual sea la constante C. Además, si F(x) y G(x) son dos primitivas de una función f(x), entonces F(x) y G(x) se diferencian en una constante.

La forma de escribir que F(x) es una primitiva de f(x) es la siguiente: $\int f(x)dx = F(x)+C$ y se lee como :"La integral, $\int$, de f(x) por **diferencial** de x, es igual a F(x) más C. siendo C, cualquier constante".

Así $\int 2xdx = x^2+C$, C constante.

Figura 3 (R. Munsuri, 2010. Pág. 231)

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

Siguiendo las indicaciones de Godino, Font y Wilhelmi, 2006 en su artículo "Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta", para la ejecución del análisis global, empezaremos primero identificando el objetivo y estructura del tema de estudio, para pasar en un segundo nivel, a un estudio detallado de cada una de las configuraciones didácticas observadas.

Como se ha indicado en el capítulo 3.6. el tema se estructura físicamente en dos partes bien diferenciadas, una primera parte (30 primeras páginas) donde se intercala teoría y ejercicios resueltos. Y una segunda parte (12 páginas) donde se facilitan ejercicios a resolver.

Los conceptos se estructuran mediante un aprendizaje lineal que parte de la relación con el tema anterior a través de la derivación. El tema comienza introduciendo la integral indefinida como primitiva de una función y establece a continuación una serie de reglas básicas de integración (integrales inmediatas, cambio de variable, integración por partes e integrales racionales).

Posteriormente a través de la Regla de Barrow se define la integral definida así como la interpretación gráfica de la misma, para finalmente desarrollar dos aplicaciones de la misma (cálculo de áreas y volúmenes).

El objetivo teórico del tema es establecer unos conceptos básicos que permitan el cálculo mecánico de integrales (definidas e indefinidas) a través de diversos métodos de integración, así como la aplicación de la integración definida para el cálculo sistemático de áreas y volúmenes en cuerpos de revolución. El objetivo práctico del tema es establecer unas herramientas y sistemas que permitan al alumnado resolver ejercicios tipo para la superación de una prueba reglada (PAU).

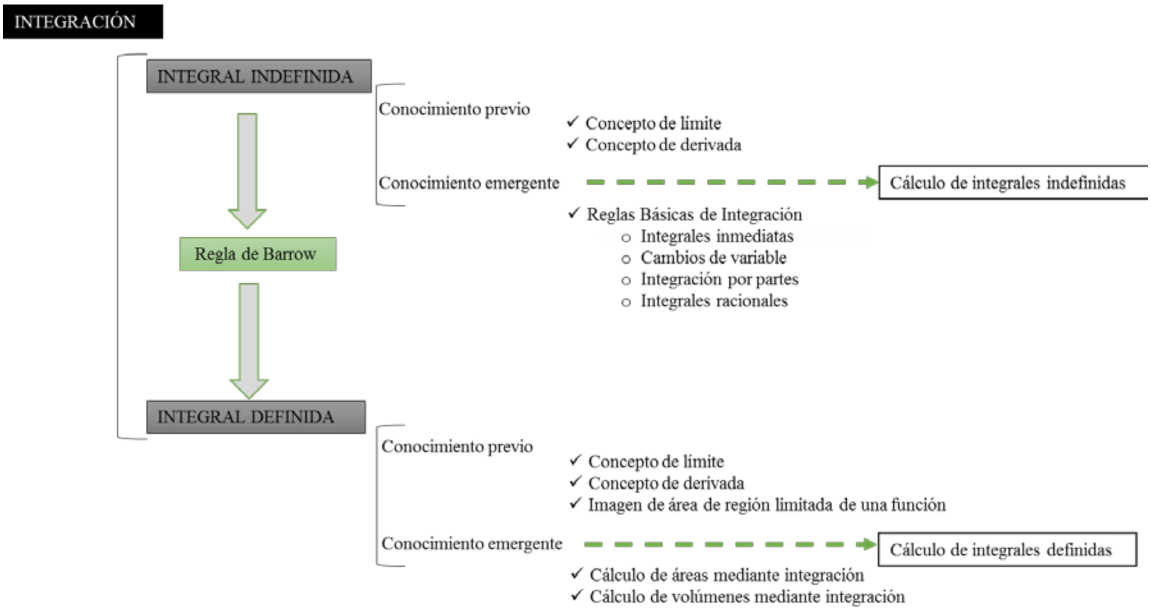


Figura 4. Esquema de contenidos del libro de referencia

Se realiza a continuación un análisis detallado del texto, mostrando los conflictos semióticos que el texto puede presentar para el alumnado, que recordamos que cursa a distancia, por lo que la mayoría de la docencia es autónoma.

Dividimos el tema en tres partes, correspondientes a la Integral indefinida (parte I), la Integral definida (parte II) y el bloque de ejercicios (parte III)

- Parte I: Integral indefinida.

Se inicia el tema mediante el concepto de integral definida, sin ningún tipo de contextualización, mediante una definición tras un ejemplo práctico de la misma. El ejemplo pretende ser un “elemento genérico” que el alumno debe creer ya que no hay ningún tipo de argumentación al respecto o referencia explícita que explique cómo se determina que x^2es una primitiva de la función *f(x)=2x.* Esto implica, que el elemento contextual que influye en la capacidad de entender este concepto radica en la sucesión temporal que conlleva el concepto de derivada (estudiado en el tema anterior).

$F(x)=x^2$ es una primitiva de la función $f(x)=2x$, ya que F'(x)=f(x).

Así $\int 2x dx = x^2 + C$, C constante.

Figura 5. Concepto de primitiva (R. Munsuri, 2010, pág. 231)

El siguiente apartado, es el que clarifica al alumno el cálculo de primitivas, ya que establece en primer lugar unas reglas básicas, que permiten al alumnado el cálculo de integrales compuestas por adición de funciones o producto de una función por una constante, así como se establecen las integrales inmediatas como aquellas que proceden de la derivación inmediata. Seguidamente se anexan diversos ejemplos donde se pone de manifiesto el uso de dichas herramientas.

Ejercicio 3.1.-Calcula $\int (sen(x)+2\cos(x))dx$

$$\int (sen(x)+2\cos(x))dx = \int sen(x)dx + 2\int \cos(x)dx = -\cos(x) + 2sen(x) + C$$

◊

Ejercicio 3.2.-Calcula $\int (x+x^2+5)dx$

$$\int (x+x^2+5)dx = \int x dx + \int x^2 dx + \int 5 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 5x + C$$

Figura 6. Cálculo de integral indefinida inmediata (R. Munsuri, 2010, pág. 233)

A continuación, y esta vez de forma contextualizada a través de la Regla de la Cadena para la derivación de funciones compuestas, se introduce el cambio de variable para la resolución de determinadas integrales. La explicación se realiza a través del siguiente ejemplo para F(ax+b):

Tomamos como cambio de variable $u = ax + b$, para lo cual derivamos **u** respecto de **x**, es decir $\frac{du}{dx} = a$ y por tanto $\frac{dx}{du} = \frac{1}{a}$, además $dx = \frac{dx}{du}.du = \frac{du}{a}$, entonces:

$$\int F(ax+b)dx = \int F(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int F(u)du .$$

Una vez resuelta la integral en función de **u**, deshacemos el cambio de variable sustituyendo **u** por **ax+b.**

Figura 7. Cambio de variable (R. Munsuri, 2010, pág. 235)

El problema de este ejemplo es que no permite al alumno establecer una generalización del concepto que se queda con que el cambio de variable es útil para la estructura marcada en el ejemplo. Esta idea se refuerza en los ejemplos que se muestran a continuación, ya que en todos se realiza el mismo tipo cambio de variable *(u=ax+b).*

El problema generado de que el alumno no identificase el tipo de cambio de variable más adecuado para la resolución de una integral concreta, no se puede decir que pueda resolverse fácilmente, ya que se puede considerar una habilidad el saber cuál es el cambio de variable adecuado, que se obtiene a través de la experimentación. No obstante, a este nivel educativo, se ha comprobado, que en caso de tener que resolver una integral por cambio de variable se facilita al alumnado el cambio a realizar, por lo que podemos suponer que este conflicto no se va a producir.

En el siguiente apartado se desarrolla la integración por partes, se parte del concepto teórico de la misma y su extensión a la segunda y tercera derivada. Se añaden a continuación 5 ejemplos resueltos.

Aunque no aparece en el manual, la integración por partes en el aula, se explica a través de su expresión extendida: “el método de cajas” cumplimentado con una regla mnemotécnica ALPES (arcos, log, polinomios, exponenciales, senos y cosenos). De esta manera unifican en un solo paso todas las secuencias que requiere esta metodología. Esta herramienta, aunque sea excesivamente mecánica, permite facilitar el cálculo de integrales al alumnado.

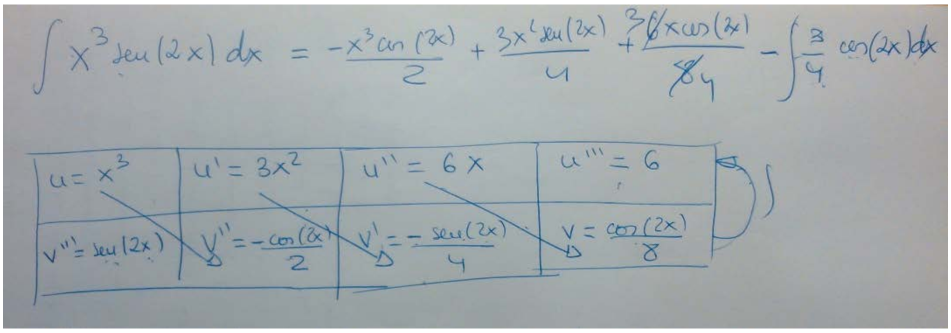
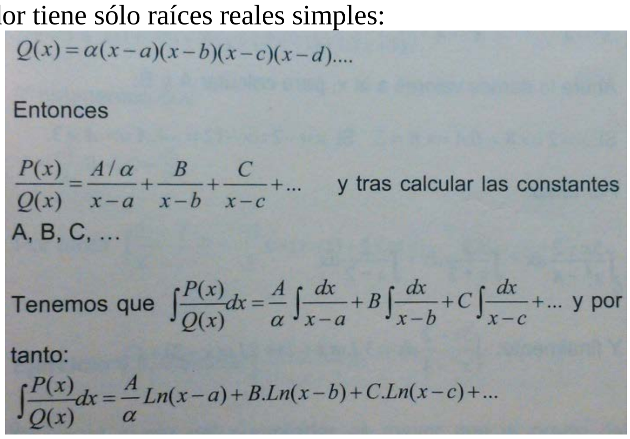


Figura 8. Ejemplo de resolución de integral a través del “método de cajas”

Finalmente y para concluir el apartado de la integración indefinida se desarrolla a través de ejemplos la forma de actuar frente a integrales racionales. Se inicia el apartado distinguiendo dos casos básicos: a) grado del polinomio del numerador mayor igual que el denominador; b) grado del polinomio del numerador menor que el grado de polinomio del denominador. En este último caso se procederá a factorizar según tres posibles casos.

Para el desarrollo de los tres casos que se presentan, el manual sigue el mismo esquema: explicación matemática del procedimiento seguido de ejercicios resueltos mediante cálculo numérico apoyado con texto explicativo sobre el procedimiento a realizar.

Caso 1: El denominador tiene sólo raíces reales simples:



$Q(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)....$

Entonces

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A/\alpha}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ...$ y tras calcular las constantes A, B, C, …

Tenemos que $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A}{\alpha}\int\frac{dx}{x-a} + B\int\frac{dx}{x-b} + C\int\frac{dx}{x-c} + ...$ y por tanto:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A}{\alpha}Ln(x-a) + B.Ln(x-b) + C.Ln(x-c) + ...$

Figura 9.1. Integrales Racionales, factorización según casos (R. Munsuri, 2010, pág. 241-248)

Caso 2:El denominador tiene raíces reales múltiples:

Ejercicio 6.6.-Calcula $\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx$

$x^3+4x^2+5x+2=(x+2)(x+1)^2$. Entonces:

$\frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$, operamos, igualamos y calculamos las constantes A, B y C, => $A=2,\ B=-2\ y\ C=3.$
Por tanto:

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

$\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx=\int\frac{2.dx}{x+2}-\int\frac{2.dx}{x+1}+\int\frac{3.dx}{(x+1)^2}$. Finalmente:

$$\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx=2Ln(x+2)-2Ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C_1$$

Caso 3. El denominador posee raíces complejas:

Ejercicio 6.7.-Calcula $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$

$x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}i$, es decir:

$\int \frac{dx}{x^2-2x+3}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+2}$, hacemos el cambio de variable $u=\frac{x-1}{\sqrt{2}}$, con $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, o bien $\frac{dx}{du}=\sqrt{2}$, y la integral se transforma en:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+3}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+2}=\sqrt{2}\int\frac{du}{u^2+1}=\sqrt{2}\ arctg(u)+C$$
$$=\sqrt{2}\ arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$$

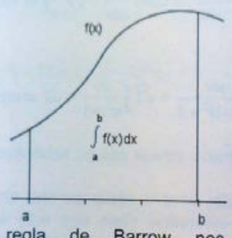
Figura 9.2. Integrales Racionales, factorización según casos (R. Munsuri, 2010, pág. 241-248)

- Parte II: Integral definida.

Siguiendo el mismo método descontextualizado se introduce la definición de integral definida cómo el área limitada por una función. Se complementa la definición con la regla de Barrow. Seguidamente se muestran varios ejemplos de integrales definidas y su resolución matemática.

7.-INTEGRAL DEFINIDA

Llamamos integral definida de una función f(x) en un intervalo $[a,b]$, a la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, cuyo valor coincide con el área de la región limitada entre los puntos a y b del eje X y la función f(x). Geométricamente:



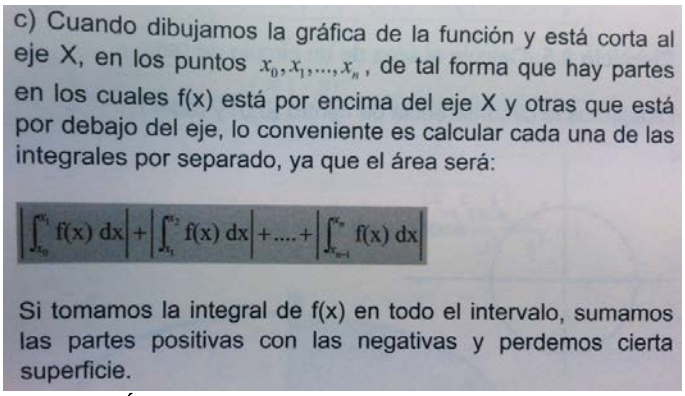
Además, la regla de Barrow nos dice que si $\int f(x)dx=F(x)+C$, entonces:

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Figura 10. Definición integral definida (R. Munsuri, 2010, pág. 248)

Este manual no establece ninguna relación entre la integral indefinida y la integral definida, por lo que es prácticamente imposible que el alumnado pueda distinguir ambas herramientas y estableciendo una relación donde el cálculo de la primera (indefinida) nos permita calcular de forma sencilla la segunda (definida). Es improbable que este conocimiento implícito llegue al alumnado La explicación por parte del profesor de manera magistral del Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow permitiría solventar este problema.

Se procede al cálculo de áreas, aplicación que resulta inmediata a partir de la definición dada de integral definida, por lo que se procede directamente al cálculo de las mismas, No obstante, y para evitar errores posteriores del alumnado se realiza una llamada de atención al mismo, sobre el área que produce una función negativa, ya que gráficamente el área se encuentra por debajo del eje OX generando un área negativa a efectos de cálculo. Esta disyuntiva, se soluciona a través del uso del valor absoluto así como la recomendación de calcular las integrales por separado, cuando la función cambia de signo a través de intervalos.



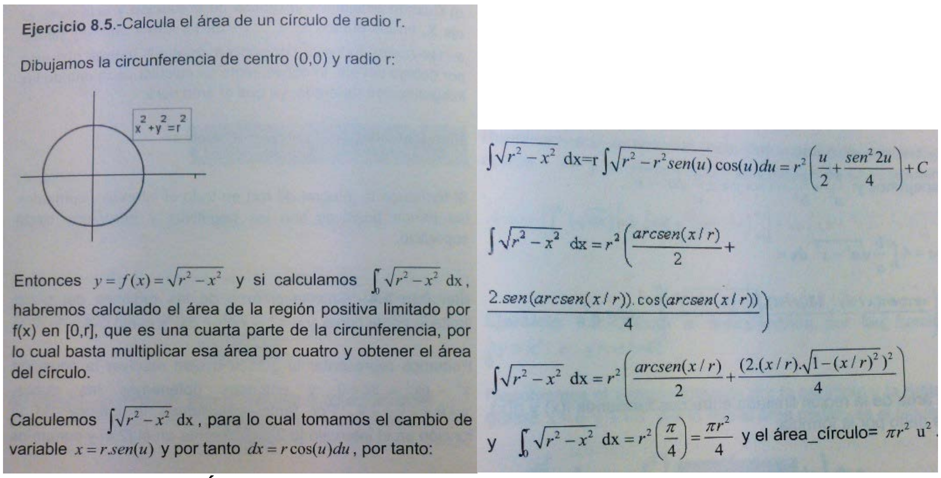
c) Cuando dibujamos la gráfica de la función y está corta al eje X, en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, de tal forma que hay partes en los cuales f(x) está por encima del eje X y otras que está por debajo del eje, lo conveniente es calcular cada una de las integrales por separado, ya que el área será:

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx\right|$$

Si tomamos la integral de f(x) en todo el intervalo, sumamos las partes positivas con las negativas y perdemos cierta superficie.

Figura 11. Área de una función (R. Munsuri, 2010, pág. 253)

El libro continúa mostrando ejercicios resueltos donde es necesario para el cálculo del área encontrar las raíces de la función e integrar por intervalos. Para incluir el cálculo de curvas como el círculo o la elipse.



Ejercicio 8.5.-Calcula el área de un círculo de radio r.

Dibujamos la circunferencia de centro (0,0) y radio r:

Entonces $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ y si calculamos $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$, habremos calculado el área de la región positiva limitado por f(x) en [0,r], que es una cuarta parte de la circunferencia, por lo cual basta multiplicar esa área por cuatro y obtener el área del círculo.

Calculemos $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$, para lo cual tomamos el cambio de variable $x=r.sen(u)$ y por tanto $dx=r\cos(u)du$, por tanto:

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r\int\sqrt{r^2-r^2 sen(u)}\cos(u)du = r^2\left(\frac{u}{2}+\frac{sen^2 2u}{4}\right)+C$$

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2\left(\frac{arcsen(x/r)}{2}+\frac{2.sen(arcsen(x/r)).\cos(arcsen(x/r))}{4}\right)$$

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2\left(\frac{arcsen(x/r)}{2}+\frac{(2.(x/r).\sqrt{1-(x/r)^2})^2}{4}\right)$$

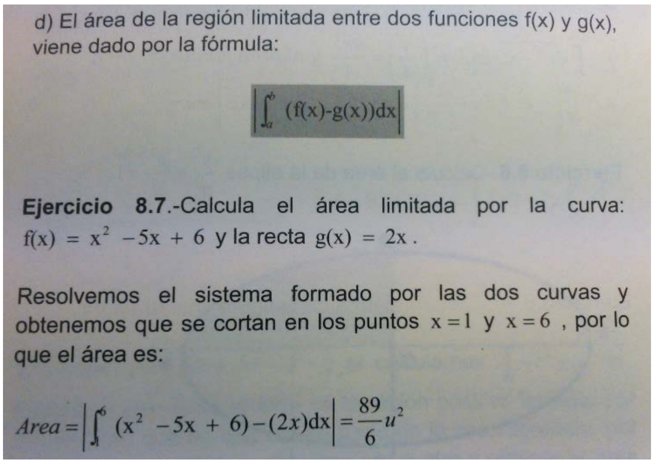
y $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi r^2}{4}$ y el área_círculo= πr^2 u^2.

Figura 12. Área de un circulo de radio r (R. Munsuri, 2010, pág. 254)

Esta descomposición básica de las curvas permite al alumnado el cálculo de nuevas formas geométricas. Se requiere el conocimiento gráfico de la forma así como su expresión matemática. Será necesario que el alumno sepa distinguir entre curva y función, no obstante, como hemos visto anteriormente es un concepto que se trabaja desde tercer cursos de Secundaria por lo que a este nivel educativo no debería presentar ningún problema.

Respecto a la interpretación geométrica de las curvas, el conocimiento deberá formar parte de los recursos obtenidos durante su bagaje anterior. Teniendo en cuenta los ejercicios propuestos por el manual, donde se facilita la fórmula de todas las curvas a calcular, se puede predecir que no se prevé problema de interpretación gráfica por parte del alumno.

Se termina el cálculo de áreas, limitando esta mediante dos funciones. El manual facilita la fórmula y se basa en diversos ejemplos como el facilitado a continuación:



d) El área de la región limitada entre dos funciones f(x) y g(x), viene dado por la fórmula:

$$\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$$

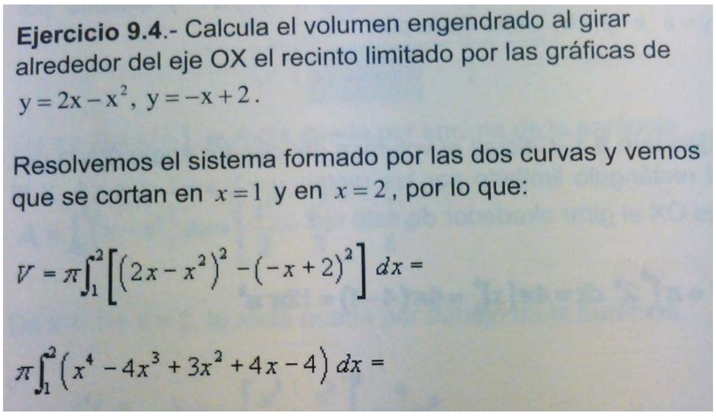
Ejercicio 8.7.-Calcula el área limitada por la curva: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ y la recta $g(x) = 2x$.

Resolvemos el sistema formado por las dos curvas y obtenemos que se cortan en los puntos $x=1$ y $x=6$, por lo que el área es:

$$Area = \left|\int_1^6 (x^2 - 5x + 6) - (2x)dx\right| = \frac{89}{6}u^2$$

Figura 13. Cálculo del área limitada por dos funciones (R. Munsuri, 2010, pág. 256)

El último apartado del tema, se dedica a la aplicación de la integral definida al cálculo de volúmenes. Se propone una formula aplicable para la formación de un cuerpo en revolución tanto en el eje OX como en el eje OY desarrollando completamente cuatro ejercicios tipo.



Ejercicio 9.4.- Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Resolvemos el sistema formado por las dos curvas y vemos que se cortan en $x=1$ y en $x=2$, por lo que:

$$V = \pi\int_1^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(-x+2\right)^2\right] dx =$$

$$\pi\int_1^2 \left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4\right) dx =$$

Figura 14. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución (R. Munsuri, 2010, pág. 260)

La descontextualización de los conceptos matemáticos que se han observado a lo largo de estos dos apartados corresponden a que el manual no pretende ser un texto farragoso o de motivación para el alumnado, sino una herramienta práctica de resolución de ejercicios que conlleven la superación de una prueba reglada (PAU). Como consecuencia de lo anterior no hay cuestiones que motiven al trabajo o propiedades que deban ser cuestionadas por el alumno. Es un manual donde el énfasis se coloca en los aspectos mecánicos frente a los conceptuales.

- Parte III: Bloque de ejercicios.

Frente a los manuales al uso no se presenta una sección de repaso que incluya ejercicios de profundización de los conceptos, así que directamente propone una batería de ejercicios del mismo nivel (incluso extraídos de la misma) que la prueba de acceso a la universidad (PAU)

Los ejercicios propuestos, siguen el esquema de la lección empezando por la integral indefinida, integral definida, y aplicaciones de la misma. Las actividades propuestas son en su mayoría ejercicios tal y como recoge la siguiente tabla resumen:

Tema 8: INTEGRACIÓN		
ACTIVIDADES	Nº	%
Ejercicio	57	93,44%
Problema	2	3,28%
Cuestión	2	3,28%
Situación	0	0,00%
total	61	

Tabla 22. Análisis ejercicios tema 8 (R. Munsuri, 2010, pág. 261-272)

Resulta evidente que es un tema de análisis y por tanto el número de ejercicios es notablemente muy superior. Debido a esto, se procede a continuación a analizar las cuatro actividades que poseen un formato distinto del de ejercicio, en primer lugar las dos cuestiones y a continuación los dos ejercicios.

Act. tipo:	□Ejercicio □Problema ■Cuestión □Situación
Actividad:	37.-a) Se sabe que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. ¿Se puede asegurar que a = b? Razona la respuesta. b) Calcula, utilizando la Regla de Barrow, la integral definida $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$
Comentario:	El ejercicio se conforma de dos apartados, interesándonos únicamente el apartado a ya que el b es un ejercicio. Si el alumno ha entendido el concepto de área bajo la curva y la necesidad de calcular áreas parciales cuando una función cambia de signo en distintos intervalos, le resultará muy fácil encontrar un contra ejemplo que asegure que a no tiene porque ser a igual que b. Contraejemplo: $\int_{-1}^{1} x^3 = \frac{x^4}{4}\Big\|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, donde -1 \neq 1$ La cuestión hacer reflexionar al alumno sobre el concepto de región y la solución algebraica de la misma.

Tabla 23.2. Actividades del tema que no son puramente ejercicios
(R. Munsuri, 2010, pág. 261-272)

Act. tipo:	□Ejercicio □Problema ■Cuestión □Situación
Actividad:	38.- a) Sea f(x) una función continua positiva tal que $1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 2$. ¿Se puede asegurar que f(x)≥ 1, para todo x ∈ [0, 1]? Razona la respuesta. b) Calcular la integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cdot cos(x)\,dx$
Comentario:	Nos vuelve a interesar únicamente un apartado, en este caso el a. Sin embargo, la cuestión vuelve al concepto de área bajo una curva. Por lo que entendiendo el concepto el alumno sólo requiere buscar un contraejemplo: $\int_0^1 (x+0{,}6)\,dx = \left\|\frac{x^2}{2}+0{,}6x\right\| \begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \left(\frac{1}{2}+0{,}6\right)-(0+0) = 1{,}1$, donde se cumple el requisito de la integral pero la función f(x) toma valores menores de 1 en el intervalo [0,1] por ejemplo f(0)=0,6
Act. tipo:	□Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación
Actividad:	39.- Teniendo en cuenta que la función toma valores positivos y negativos. Halla el valor de **a** de forma que el área limitada por el eje OX, la recta $x=-1$, la recta $x=2$ y la curva $f(x)=2x^3-3x^2+a$ quede dividida por el eje OX en dos partes con igual área.
Comentario:	Partimos del mismo concepto que en las actividades anteriores, por lo que el alumno debe plantear una igualdad para la que en ambos lados del eje OX el área en valor absoluto sea equivalente.
Act. tipo:	□Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación
Actividad:	41.-Sea $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, y sean a, b ∈ R^+. Demuestra que f(a·b) = f(a) + f(b).
Comentario:	Para resolver este problema el alumnado no solo tiene que saber resolver integrales y trabajar con legras (algebra) sino que debe recordar las propiedades de los logaritmos, en este caso concreto: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Tabla 23.2. Actividades del tema que no son puramente ejercicios
(R. Munsuri, 2010, pág. 261-272)

Como consideraciones finales, podemos establecer que este manual tiene una correcta idoneidad epistémica de los conceptos matemáticos a desarrollar en este nivel educativo.

Se echa de menos sobre todo en las introducciones, alguna práctica operativa o discursiva asociada que permita la contextualización de los conocimientos pretendidos así como crear condiciones de autoexploración en los alumnos.

El hecho de tratarse de un manual para alumnado a distancia debe lidiar con un problema relativo a la gestión del tiempo didáctico (cronogénesis) y a la gestión de las responsabilidades del profesor y de los alumnos en el proceso de aprendizaje (topogénesis) (Chevallard, 1991). Ya que este libro asume sustancialmente el proceso de enseñanza y aprendizaje que será apoyado mediante tutorías individuales y/o colectivas. Quedando en este caso, el papel del docente como un mero conductor o facilitador de materias y herramientas donde el desarrollo didáctico debe ser principalmente autónomo por parte del alumnado.

El texto está dirigido para un tipo muy variado de alumno, que por norma general no dispone de tiempo como consecuencia de diversas causas personales así como es un perfil muy variado de carencias y necesidades a las que hacer frente. La experiencia del centro, ha llevado al profesorado al desarrollo de estos manuales que consideran más adecuados a su perfil de alumnado, y cuya valían han ratificado a través de la práctica. Por ello, la mayor crítica como docentes que podemos realizar es la mecanización de la materia frente al desarrollo de conocimientos matemáticos.

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

La finalidad de este capítulo es realizar un estudio a priori de las posibles dificultades y errores que puede encontrar el alumnado de segundo curso de Bachillerato al enfrentarse con el tema de la integración.

Los comportamientos observados en el aula, se recogerán posteriormente en el análisis realizado en el capítulo 8 de este trabajo.

6.1. Dificultades previsibles en el aprendizaje de la unidad

Como se ha comentado en repetidas ocasiones, el tema de la integración es un tema perteneciente al tercer trimestre de segundo de Bachillerato y aparece como una introducción a un análisis posterior que se realizará a nivel universitario, por tanto, estamos hablando de introducir una herramienta matemática nueva.

Este estudio se realiza teniendo como referencia los cinco criterios postulados por Godino, Contreras y Font (en prensa) para valorar la idoneidad global de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Idoneidad epistémica. En este aspecto, el tema pretende ser una introducción al concepto de límite así como al análisis que se desarrollará en etapas superiores de educación, Por tanto, nos encontramos en la primera fase de un proceso de adición que se desarrollará en las asignaturas de análisis a nivel universitario; Por ello establecemos que no podemos hablar de baja o alta idoneidad al encontrarnos en la primera fase de un proceso. Desde este punto de vista, no se prevé a priori problemas al aprendizaje.

- Idoneidad cognitiva: El grado de idoneidad cognitiva es evidente, ya que se inicia el tema en este curso por lo el nivel respecto al tema será inicial. No obstante, será necesario un control y conocimiento del alumno de otros conceptos previos como la visualización y cálculo de áreas bajo un grafo, análisis por intervalos de funciones identificando puntos significativos así como otras características. Desde el punto de vista teórico, el alumnado debería en este nivel poseer una material suficiente para un correcto desarrollo de este nuevo concepto, se prevé un alto grado de idoneidad cognitiva.

- Idoneidad semiótica: Al encontrarnos en la primera fase de una nueva trayectoria didáctica no se prevé ningún tipo de conflicto en el proceso de instrucción. No obstante, deberemos tener en cuenta este concepto para evitar conflictos potenciales con el siguiente nivel educativo (universidad).

- Idoneidad mediacional, No se prevé ningún tipo de problema desde el punto de vista de adecuación y disponibilidad de recursos ya que se le ofrece al alumno números ejemplos tanto en soporte tradicional (libro y apuntes) como en soporte informático (se ofrecen diversas páginas web, donde se desarrolla el tema).

Respecto a la disponibilidad temporal, el hecho de que el tema se sitúe en el último lugar del temario de Bachillerato puede ocasionar diversos problemas de falta de tiempo si el temario anterior se ha dilatado en el tiempo, así como que su situación temporal permite menos tiempo de maduración de ideas así como de trabajo. Desde este punto de vista, se deben plantear problemas iniciales sobre todo de poca profundización en los conceptos como de poca mecanización de los procedimientos.

- Idoneidad emocional, El grado de implicación del alumnado se ha demostrado variable en función de la necesidad que estima el propio alumno en el control del tema para la superación del curso. No obstante, el interés que muestra el alumnado que realiza Bachillerato a distancia, basada en la experiencia vivida, se puede determinar como muy alto ya que la obtención de la titulación es el fin de tal actividad o el caso contrario, abandono absoluto de la materia.

Tras este análisis, parece adecuado la introducción de este concepto dentro del currículo, no obstante, a nivel práctico de aula, se prevé que la correcta implantación o no del concepto en el alumnado, será una consecuencia del trabajo realizado en temas anteriores, ya introducidos en primer curso de Bachillerato, como son el cálculo de límites y derivadas.

6.2. Errores y su posible origen

Para prever los posibles errores del alumnado, debemos en primer lugar, establecer el perfil del alumnado como consecuencia del centro en el que se realizan las practicas. Las prácticas se realizan en un centro que ofrece el Bachillerato únicamente en modalidad a distancia, y que está en principio dirigido a personas que han realizado la ESPA en el mismo centro o continúan sus estudios después de un periodo de inactividad estudiantil.

Todo ello no se puede establecer un perfil tipo. No obstante la experimentación no ha mostrado que la mayoría de alumnado se identifica con el siguiente perfil: edad entre los 20 y 30 años, con una gran iniciativa y motivación personal por la obtención de una titulación, que en la mayoría de casos, compaginan con obligaciones familiares o laborales. Por lo que en términos generales muestran gran interés personal por la obtención del aprobado (e indiferencia por la excelencia), carece de mucho tiempo libre para el estudio, y con una base de partida un tanto pobre; Consecuencia de haber cursado una secundaría de mínimos, o está se cursó en un periodo distante de tiempo.

Por todo ello, se puede prever que la mayoría de los conceptos previos necesarios para la introducción del tema, deben ser tratados con interioridad si se pretende una buena coordinación entre los mismos. Esta puede ser una buena justificación del porque el tema se sitúa en último lugar respecto al programa didáctico. Se debe presuponer, que el alumnado ha tenido tiempo para conocer/recuperar todos los conceptos anteriores, basados principalmente en el análisis gráfico, cálculo de límites y cálculo de derivadas.

Tras todo lo anteriormente comentado podemos predecir que los primeros errores serian una consecuencia de problemas conceptuales relacionados análisis de funciones, especialmente con el uso de la derivada, la función área o el cálculo de máximos y mínimos.

Por ejemplo, la falta de imagen visual, impedirá al alumno interpretar correctamente el “significado” de área bajo un gráfico (visión holística del gráfico). O la falta de la idea de proceso acumulativo, no permitirá entender la integral como consecuencia de las variaciones de magnitudes en un intervalo, no permitiendo entender el problema como una suma de áreas de rectángulos que barren un área determinada.

La posterior ruptura de la visión holística del gráfico en partes será otro de los puntos de conflicto entre los alumnos. Debemos estudiar las entidades discretas relacionadas entre sí como parte del dominio para proceder a su correcta interpretación gráfica. Es decir, si solicitamos calcular el área en el intervalo [-2, 2] de la función f(x)= x^3 el alumno calculará $\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$. Resulta evidente que el área no puede ser cero, por tanto es necesario la descomposición según la función corte al eje OX

Es posible que en ocasiones, el alumno no sea capaz de conocer exactamente si una función está por encima o por debajo del eje *OX*, aunque si debe ser viable a este nivel educativo encontrar los puntos de corte de la curva con el mismo. Una vez establecidos estos, bastará con estudiar las regiones aisladas.

En el caso aislado de intervalos, el alumnado debe saber que el área total se calculará como la suma de los valores absolutos de cada una de ellas. Las integrales que nos den valor negativo indican que la función es negativa en los límites de integración y por tanto está por debajo del eje *OX*; mientras que las que nos dé positivo es porque la función también lo es y la curva está por encima del eje *OX* entre los intervalos de integración.

De lo comentado anteriormente podemos encontrar dos tipos de errores: Dar cómo área el valor de la integral entre los límites dados sin observar el signo de la misma. Esto puede presentar situaciones de dar como respuesta un área negativa. O el otro error tipo será dar el área como la integral entre los límites dados sin observar si hay cortes con el eje *OX* entre los mencionados límites.

La resolución de problemas de cálculo de áreas que se anulan presenta una clara división dicotómica en el pensamiento de los estudiantes: Unos razonan a partir de los número que se obtienen al realizar las integrales (medida) y otros, lo hacen sobre la visión del área a determinar (magnitud).

Otro error que se prevé es al desarrollar el cálculo de una integral, el alumno puede olvidar colocar el diferencial de *x* (*dx*) y, aunque esto no afecte al resultado, hay que intentar evitarlo. Podríamos considerarlo como una falta gramatical de la escritura matemática.

También se plantea como un error recurrente el prescindir de colocar el más *C* al final del cálculo de una integral indefinida, lo que nos indica que solo estamos dando como resultado una primitiva y no el conjunto de todas las primitivas que es la integral indefinida.

$$\int 2x = x^2 \Rightarrow \textbf{Incorrecto}$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + C \Rightarrow \textbf{Correcto}$$

Otro error previsible, ahora sí que bastante grave, es el aplicar la linealidad al producto o al cociente. Este error puede ser una consecuencia directa de la extrapolación del procedimiento expuesto en el punto 2 del manual de referencia bajo el epígrafe: reglas de integración.

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \Rightarrow \textbf{Incorrecto}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx} \Rightarrow \textbf{Incorrecto}$$

Tampoco es correcto multiplicar y dividir dentro y fuera de la integral por la variable, ya que solo se puede hacer por valores numéricos. (Ver propiedades integración tabla 20)

Se prevé como otro error típico la falta del uso de la función valor absoluto (deficiencia generalizada de este concepto de análisis). Las funciones racionales que tienen en el numerador la derivada del denominador son la derivada del logaritmo del valor absoluto del denominador.

Por ejemplo, si nos centramos en la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ tiene por dominio $\Re - \{3\}$
Estudiemos ahora por partes:
Si x>3 la primitiva será $\ln(x-3)$, pues efectivamente (ln(x-3))´=$\frac{1}{x-3}$
Si x<3, la primitiva es ln (3-x) puesto que (ln(3-x))´=$\frac{-1}{3-x} = \frac{1}{x-3}$
Por tanto, para x≠3, la primitiva es $\ln|x-3|$
Luego :$\int \frac{1}{x-3} dx = \ln|x-3| + C$

Tabla 24. Justificación del uso del valor absoluto

Gran parte de las integrales que se van a proponer al alumnado a este nivel se pueden resolver bien a través de integrales inmediatas o semi-inmediatas, se pueden hacer con un sencillo cambio de variable. Cuando se han hecho pocas integrales no es fácil ver qué número hay que multiplicar o dividir el integrando para que quede una de las integrales conocidas.

Así mismo, el cambio de variable no está sujeto a ninguna regla determinada, por lo que la intuición (o experiencia) resuelve la mayoría de los casos. Obtener habilidad requiere de un trabajo exhaustivo no previsible en el alumnado. Este problema se resuelve a este nivel, facilitando en el propio enunciado el cambio a realizar convirtiendo el ejercicio en un mero mecanicismo.

Para que el cambio de variable sea adecuado, debe haber una correspondencia biyectiva entre la antigua y la nueva variable. Esto quiere decir que a cada valor de la antigua variable le hace corresponder un único valor de la nueva y viceversa. Dentro de este aspecto, podemos presuponer que un error habitual o recurrente sea el no deshacer el cambio de variable o simplemente cambiar la letra nueva (habitualmente *t*) por la antigua (generalmente *x*).

En los ejercicios de resolución de áreas de figuras regladas, se suele facilitar la expresión general de las curvas, por ello, podemos establecer que ciertos alumnos alberguen bajo un símbolo integral dos variables distintas. A este nivel educativo sólo se estudia la integración con una variante, por lo cual este ejercicio requiere operaciones previas.

Los términos de la integral $\int f(x)\, dx$ son el signo integral "$\int$" y el integrando “*f*(*x*)”. “*dx*” nos deja claro que se está integrando respecto a la variable “*x*”, con lo que cualquier otra letra que aparezca estará representando un parámetro, ya que bajo el símbolo integral solo debe aparecer una variable:

En resumen, la mayoría de los errores tendrán su origen en un manejo insuficiente de álgebra y, por supuesto, de análisis. Conceptualmente, cualquier noción que implique *dx* resultará compleja, porque no es viable un entendimiento completo de concepto a este nivel educativo.

Capítulo 7
El proceso de estudio

Este capítulo pretende, plantear un proceso de aprendizaje del tema de la integral en segundo curso de Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología. Esta propuesta personal seguirá el esquema tradicional por entenderse más operativa. Se plantea introducir el tema a través de la idea intuitiva de área bajo una curva, que da lugar a la integral definida. Posteriormente a través del Teorema Fundamental y la Regla de Barrow se pretende establecer la relación entre ambas para finalmente presentar aplicaciones de la integral definida. Este esquema, pretende enlazar los conceptos de forma que se establezca una relación entre los mismos.

7.1. Estructura del proceso de estudio

Como se ha indicado en la introducción a este capítulo, frente al esquema mostrado en el manual de referencia para el curso donde se realizan las practicas, se propone otro similar, basado en los cinco siguientes puntos:

1º Motivación: "Arquímedes el método exhaustivo"

2º Integral definida

3º Anti-derivada/Primitiva

4º Relación entre la integral indefinida y definida

5º Aplicaciones

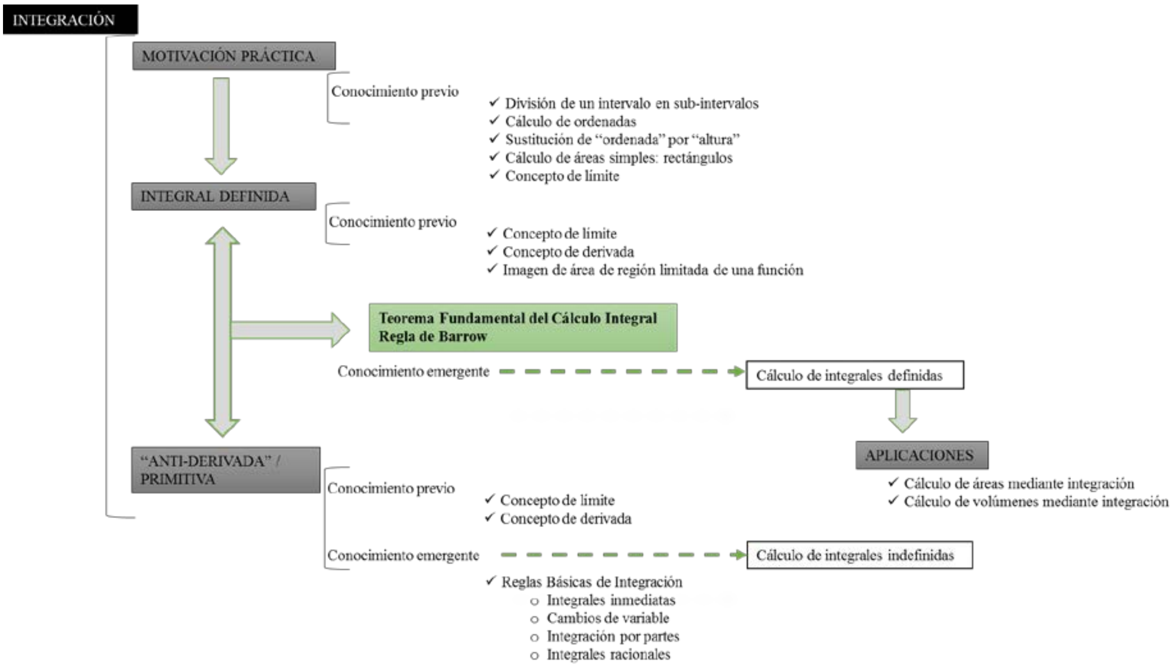


Figura 15. Esquema de contenidos en el proceso de estudio propuesto

Se procede a continuación a desarrollar el procedimiento a utilizar en cada punto anteriormente descrito.

1. Arquímedes y el método exhaustivo.

Se propone iniciar el tema a través de una motivación práctica con un problema clásico de las matemáticas: El cálculo del área bajo una curva. Para ello nos basamos del método exhaustivo, a través del cual Arquímedes demostró que el área de la región limitada por la parábola $y=x^2$y las rectas $x=0$ y $x=a$ era $\frac{a^3}{3}$.

Para ello se propone un ejemplo gráfico, ejemplo: *Un agricultor tiene una finca que está limitada por una carretera y un rio y necesita calcular el área de su terreno.*

Solución: Resulta que la ribera del río es irregular, por lo que si realizamos particiones, y vamos construyendo rectángulos dentro de la finca, la suma de las áreas de los rectángulos formados nos darán una aproximación del área total. Realizaremos esta técnica tanto por defecto (fig. a y fig. c) como por exceso (fig. b y fig. d) de modo que: $s(P) < A < S(P)$ donde P será la partición y *s(P)* y *S(P)* las sumas por defecto y exceso respectivamente.

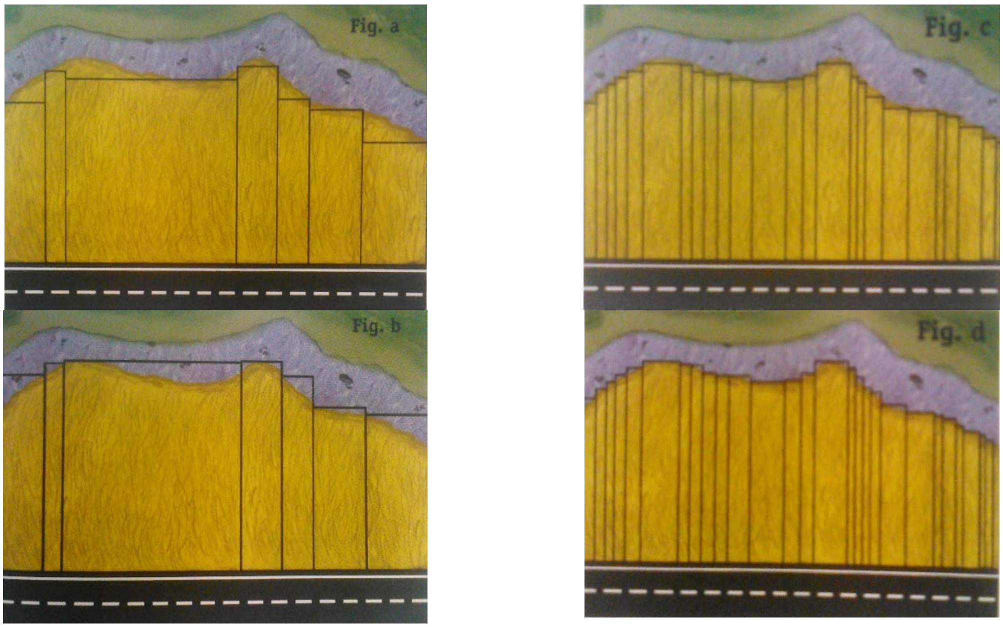


Figura 16. Representación gráfica método exhaustivo (M. Cañada, 2009, pág. 225)

Resulta evidente que a medida que vayamos tomando particiones cada vez más finas, iremos obteniendo mejores aproximaciones del área buscada. De tal forma que: $\lim_{n\to\infty} s(P_n) = A = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$

La idea de acumulación del conjunto formado por los términos de una sucesión a priori no debe presentar ningún problema conceptual para el alumnado. El alumno, ha trabajado en el tema anterior el concepto de límite, el conjunto como un conjunto infinito cuyos elementos, a su vez, son conjuntos infinitos. La sucesión infinita, al pensarse en su totalidad, da lugar a un número real asociado a ella.

2. Integral definida

A partir de la reflexión anterior podemos determinar que si f(x) es una función continúa en el intervalo [a, b], la integral definida de f entre a y b es: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$ siendo a y b límites de integración.

3. Anti-derivada/ Primitiva

Se propone seguir la idea de antiderivada propuesta en el manual. (Ver anexo A)

4. Relación entre integral indefinida e definida

Este punto no está reflejado en el manual de referencia, sino que simplemente tras la definición de integral definida se escribe la Regla de Barrow. Nos resulta importante establecer la relación entre las dos integrales ya que simplifica el problema de cálculo de áreas anteriormente planteado. No se plantea el desarrollar la demostración que se ha añadido en este trabajo como argumento matemático en la tabla 21.

<u>Teorema fundamental del cálculo integral</u>: Si f es una función continua en [a, b], entonces la función $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y además su derivada es $G'(x) = f(x)$. Es decir, que *G(x)* e una primitiva de $f(x)$.

La función definida de la forma $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es la función integral y verifica que, cuando f(x) es positiva, entonces G(x_0) es el valor del área comprendida entre f(x), el eje OX entre los valores x=a y x=x_0

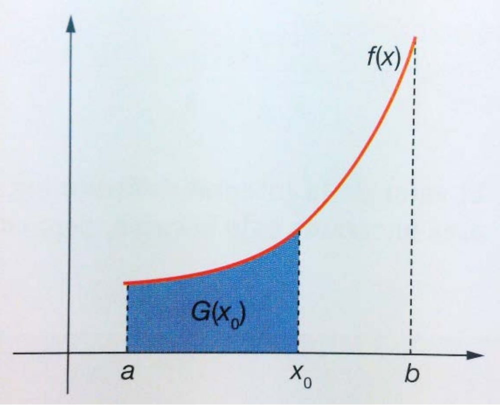


Figura 17. Interpretación gráfica Teorema Fundamental (M. Cañada, 2009, pág. 227)

Regla de Barrow: Si f es una función continua en [a, b] y F(x) es una primitiva de f(x), entonces $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Por tanto, la Regla de Barrow, nos permite calcular integrales definidas a través de una primitiva.

5. Aplicaciones de la integral definida

Se plantea seguir el esquema del manual: Área entre una curva y el eje OX, área entre dos curvas y cálculo de volúmenes de revolución a través de la integral definida.

7.2. Distribución del tiempo en clase

Como se ha indicado en sucesivas ocasiones, las prácticas se llevan a cabo en un centro donde el Bachillerato se cursa en modalidad a distancia. Debido a ello, la mayor parte del proceso de aprendizaje se realiza de forma autónoma por el alumnado. No obstante, semanalmente el alumno tiene la opción de asistir a dos teorías colectivas y dos teorías individuales por semana según se establece institucionalmente desde el centro.

Se ha comprobado durante el periodo de prácticas en el centro, que la mayoría de los alumnos utilizan el correo electrónico para resolver dudas individualizadas evitando el desplazamiento al centro. Este gesto se ha popularizado entre el alumnado como consecuencia de las facilidades que aporta el tutor, tanto en la resolución de dudas como en la eficacia de tiempo en que las resuelve, siendo una herramienta muy útil de trabajo.

Las tutorías colectivas, sustituirían a las horas lectivas tradicionales de un centro presencial. Durante el periodo de prácticas, las tutorías de este nivel (2º Bachillerato de Ciencias de la Salud y Tecnología) se desarrollan los lunes de 20.00 a 21.00 y los jueves de 18.00 a 19.00

Cada tutoría colectiva se desarrolla en 50 minutos. Los primeros 20 minutos se dedican a exposición de nuevo temario a través de la extracción de ideas fundamentales y se realizan ejercicios relacionados con el temario expuesto. El resto del tiempo se dedica a la resolución de dudas existentes en la materia expuesta los días anteriores.

El hecho de que el temario se exponga a pinceladas exige por parte del profesor de facilitar un manual que sea útil y de fácil manejo, a partir del cual puedan desarrollar los conceptos. Este esquema aunque flexible, marca la distribución de tiempo no permitiendo docencias constructivistas o por descubrimiento.

Las circunstancias anteriormente descritas del centro, impidieron que pudiera poner en práctica la totalidad de la experiencia docente planteada. Se me facilitó una semana de docencia autónoma (2 sesiones) para desarrollar las aplicaciones de la integral definida. Por ello, la institucionalización llevada a cabo se inició en el punto 4 de la propuesta anteriormente descrita.

La siguiente tabla pretende establecer una relación de los tiempos dedicados a cada contenido en cada sesión:

Fecha	Contenido	Tiempo	Responsable	Tipo de docencia
31/03/2014	Se establece la relación entre la integral indefinida y la integral definida ▪ Teorema fundamental ▪ Regla de Barrow	4 min	Profesor	Magistral
	Cálculo de áreas mediante integración -Área entre una curva y el eje OX ▪ Caso I. Función $f(x)$ es positiva en el intervalo [a, b] ▪ Caso II. Función $f(x)$ es negativa en el intervalo [a, b] ▪ Caso III. Función $f(x)$ cambia de signo en el intervalo [a, b]	7 min	Profesor	Magistral

Tabla 25.1. Distribución de los contenidos durante el tiempo de docencia

	-Área entre dos curvas ▪ Caso I: Función $f(x)>g(x)>0 \quad \forall x \in [a,b]$ ▪ Caso II: Función $f(x)>g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, pero no necesariamente definidas positivas. ▪ Caso III: Caso general de dos funciones cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$	7 min	Profesor	Magistral
	Ejercicios de cálculo de áreas mediante integración	15 min	Profesor	Magistral
	Resolución dudas de ejercicios de integración: integral indefinida y integral definida.	17 min	Compartida	Dialógica
	Tiempo total sesión 1	50 min		
03/04/2014	Cálculo de volúmenes de mediante integración: ▪ Caso I: Cuerpo de revolución que se obtiene al girar una curva alrededor del eje OX ▪ Caso II: Cuerpo de revolución que se obtiene al girar una curva alrededor del eje OY	6 min	Profesor	Magistral
	Calculo de volúmenes de revolución	10 min	Profesor	Magistral
	Resolución dudas sobre el tema de integración	34 min	Compartida	Dialógica
	Tiempo total sesión 2	50 min		

Tabla 25.2. Distribución de los contenidos durante el tiempo de docencia

7.3 Actividades adicionales planificadas

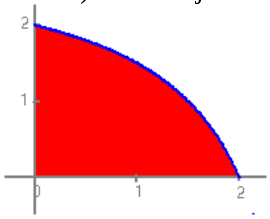
Se proponen a continuación una serie de ejercicios que permitan establecer una relación entre situaciones de la vida real: física, biología, economía… de tal manera que el alumno pueda identificar la aplicación "real" de la integral para su vida cotidiana.

Estas actividades no se han podido llevar a cabo en el aula como consecuencia de la escasez de tiempo que se disponía ya que nos enfrentamos al aula las semanas previas a la evaluación final de tema, donde la prioridad era subsanar los errores de conceptos para la correcta superación de las pruebas.

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Actividad: Se desea pintar un balcón con pintura antideslizante que cuesta a 30 €/m^2. El balcón tiene la forma del corte de una rama la hipérbola $y=\dfrac{3}{x-3}+3$ (x e y medidos en metros) con los ejes coordenados. Calcular el valor de la pintura.

Solución:



Corte con el eje *OX:*

$$y=\frac{3}{x-3}+3=0 \Rightarrow x=2$$

$$A=\int_0^3\left(\frac{3}{x-3}+3\right)dx=[3\ln|x-3|+3x]_0^2$$
$$=3\ln 1+6-(3\ln 3+0)$$
$$=6-3\ln 3\approx 2{,}70$$

2,70 m^2 · 30 €/m^2 = 81,12 € es el coste de la pintura.

Tabla 26.1.Relación de ejercicios extraídos CD Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Actividad: El lanzamiento de un nuevo producto tecnológico hace que crezcan las ventas exponencialmente en los primeros doce meses.
El número de miles de unidades vendidas sigue la función V(x) = 4e0,1x – 4 , siendo x el tiempo transcurrido en meses.
Calcula el número unidades vendidas en los doce meses.

Solución: Número de ventas en los 12 primeros meses:

$$\int_0^{12} (4e^{0,1x} - 4)\,dx = \left[4\frac{e^{0,1x}}{0,1} - 4x\right]_0^{12} = 40e^{1,2} - 48 - (40 - 0)$$

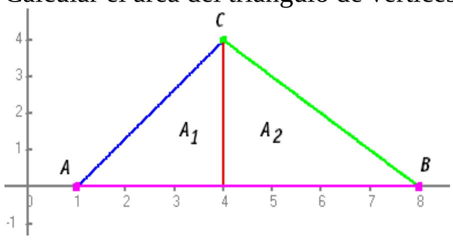
$$= 40e^{1,2} - 88 = 44{,}805$$

Aproximadamente se han vendido 44,805 unidades.

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Actividad: Calcular el área del triángulo de vértices A(1, 0), B(8, 0) y C(4, 4).

Solución:



La recta que pasa por A y C es: $y - 0 = \frac{4}{3}(x - 1)$

La recta que pasa por A y C es: $y - 0 = -\frac{4}{4}(x - 8)$

$$A = \int_1^4 \frac{4}{3}(x-1)\,dx$$

$$+ \int_4^8 -(x-8)\,dx = \left[\frac{4}{3}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^4 + \left[\frac{-x^2}{2} + 8x\right]_4^8$$

$$= \frac{4}{3}\left(8 - 4 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) + \left(-32 + 64 - (-8 + 32)\right) = 6 + 8$$

$$= 14u^2$$

Gráficamente se comprueba que A1 es un triángulo de base 3 y altura 4 mientras que A2 tiene base 4 y altura 4.

Act. tipo: □Ejercicio ■Problema □Cuestión □Situación

Actividad: Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

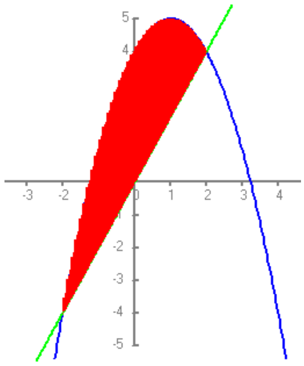
PAU. Castilla-León, Junio 2006

Solución: a) Para la parábola $f(x)$ su vértice es (1, 5).

Los puntos de corte de la parábola y la recta son:

$-x^2 + 2x + 4 = 2x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

x	*f*(*x*)	*g*(*x*)
–2	–4	–4
–1	1	–2
0	4	0
1	5	2
2	4	4
3	1	6



b) $A = \left|\int_{-2}^{2}(-x^2 + 2x + 4 - 2x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{2}(-x^2 + 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2}\right| = \left|\frac{-8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right| = \frac{32}{3}\,km^2$

El importe del terreno es $\frac{32}{3} \cdot 30 = 320$ millones de euros

Tabla 26.2..Relación de ejercicios extraídos CD Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato

Del mismo manual se extraen a continuación varios ejercicios para cálculo de integrales a través del uso de programas informativos. Aunque no se han desarrollado en el aula (en modalidad a distancia no se dispone de tiempo real de aula), este tipo de actividad se considera muy adecuada para la captación del interés del alumnado, ya que pueden utilizar herramientas informáticas estableciendo una relación entre su vida real y la materia.

Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Actividad:	Calcular una primitiva de la función $\frac{x-2}{x-1}$
Programa	Derive
Solución:	El programa calculará una primitiva mediante la sentencia: INT((x - 2)/(x - 1), x), dando como solución: x - LN(x - 1)
Act. tipo:	■Ejercicio □Problema □Cuestión □Situación
Actividad:	Calcular $\int_0^2 e^x(x+1)\,dx$
Programa	Derive
Solución:	Habrá que escribir: INT(EXP(x)·(x + 1), x, 0, 2) donde los dos últimos parámetros expresan los extremos de integración. Se obtiene como solución: 2·ê^2 (2·exp(x)^2)

Tabla 27.Aplicación de las nuevas tecnologías para el cálculo integral (CD Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato)

De forma similar, otros programas como WinFun, no permite gráficamente el área bajo una curva o entre dos curvas. No es un programa de cálculo simbólico

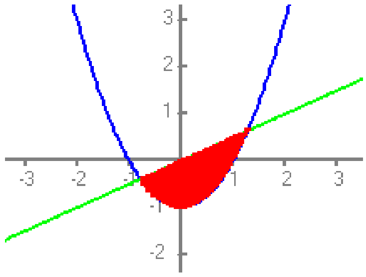


Figura 18. Representación gráfica del área entre dos funciones con el programa WinFun

Dentro de la aplicación de las nuevas tecnologías es destacable, además de los programas ya mencionados, el Portal Descartes, donde se presentan varias unidades didácticas relacionadas con las integrales y el cálculo de áreas.

7.4. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista.

Teniendo en cuenta que el aula donde se imparte el tema es un curso a distancia, la actividad autónoma por parte del alumno es el elemento base de la didáctica impartida en el centro donde se realizan las prácticas. Esta razón justifica que la mayor parte de horas se dediquen al estudio autónomo asistido consistente en que el alumno fuera del horario de tutorías (horario lectivo) realice un estudio de los conceptos matemáticos introducidos por el profesor así como realice el mayor número de actividades propuestas sobre ellos.

La filosofía del centro es la de no imponer o solicitar actividades para la asistencia a la siguiente lección (tradicionalmente conocido como tareas) puesto que no quieren interferir en la distribución del tiempo externo del alumno, dejando el estudio como una decisión personal que el alumnado deberá asumir.

El tiempo estimado institucionalmente para el desarrollo del tema es de 4 semanas, de modo que una de ellas quede para repaso y tres para el desarrollo del mismo. El tiempo de estudio del alumnado es igualmente de 4 semanas, aunque depende de cada alumno, cuatro horas diarias por 4 semanas (16 horas), se consideran más que suficiente para preparar completamente el tema.

En la siguiente tabla, se pretende establecer una propuesta de dedicación fuera del centro que el alumno debería realizar para la superación del tema de integración, no se incluyen las horas de aula o tutoría individual en la que se realiza trabajo colectivo entre profesorado-alumno para la solución de problemas o cuestiones.

Tipo de tarea	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza o aprendizaje
Estudio de conceptos de integración	½ hora	Teoría y fundamentos en los que se basa la integración
Estudio teórico de las reglas de integración: directas, cambio de variable, integración por partes	2 horas	Repaso de derivación, así como de la regla de la cadena aprendida en el tema anterior

Tabla 28.1. Tarea autónoma del alumnado

Tipo de tarea	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza o aprendizaje
Cálculo de integrales indefinidas	4 horas	Cálculo sistemático de integrales, consolidación de la teoría aprendida
Estudio de la regla de Barrow y su uso para el cálculo de integrales definidas	1/2 hora	Teoría y fundamentos en los que se basa la integración
Cálculo de integrales definidas	1 horas	Cálculo sistemático de integrales, consolidación de la teoría aprendida
Cálculo de áreas mediante uso de la integración	2 horas	Aplicación de los conceptos estudiados para una actividad concreta
Cálculo de volúmenes mediante el uso de la integración	1 hora	Aplicación de los conceptos estudiados para una actividad concreta
Ejercicios y problemas sobre el tema de integración	4 horas	Consolidación de los conceptos estudiado durante el tema

Tabla 28.2. Tarea autónoma del alumnado

Capítulo 8
Experimentación

Este último capítulo de trabajo pretende analizar los resultados de la experimentación llevada a cabo en el aula durante el proceso de prácticas, y en la medida de lo posible, obtener unas reflexiones sobre el estudio llevado a cabo en un grupo tan reducido y con unas características muy particulares (modalidad a distancia, alumnado adulto).

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

Como se ha indicado anteriormente la experimentación se llevó a cabo en un aula de segundo curso de Bachillerato en un centro público de Pamplona dirigido para educación adulta y con la modalidad de a distancia. Como cabe esperar en este centro, no hay una tipología concreta de alumno ni tampoco una razón común que justifique su presencia en este curso. No obstante, la mayoría de los alumnos que acudían a las tutorías colectivas se identificaban con el siguiente perfil:

Hombre o mujer, con una edad media 25-30, que se encuentra trabajando de forma simultánea al estudio, buscan de la titulación de Bachillerato la necesidad cubrir un requisito que se les solicita desde la propia empresa, a la que ya pertenecen, para el ascenso dentro de la misma. Por tanto, no tienen intención a priori de presentarse a la Prueba de Acceso de Selectividad.

Es un alumno, que con carácter general abandono los estudios aproximadamente hace 10 años, como consecuencia de una gran facilidad de obtener trabajo y falta de motivación personal hacía los estudios superiores.

Las circunstancias temporales y concretas del centro imposibilitaron llevar a cabo la totalidad de la propuesta didáctica indicada en el capítulo 7 de este trabajo. El hecho de no poder desarrollar la primera etapa de motivación y contextualización, no debe verse como un fracaso en sí mismo, ya que lo que nos interesa estudiar es si el alumno posee la madurez matemática suficiente, para entender la integración dentro del contexto educativo en la cual se ubica reglamentariamente, así como el estudio de si dicha modalidad de estudio facilita o dificulta en alguna medida la consolidación de conceptos matemáticos.

La estructura didáctica viene marcada por la modalidad a distancia y la falta de tiempo material, dos circunstancias que dificultan en gran medida el uso de cualquier modalidad didáctica fuera de la exposición magistral de conceptos.

El desarrollo de los contenidos se produjo de forma líneal y sin salirse de la estructura prefijada del tema Los medios principales empleados fueron el libro de texto de referencia, como ejercicios propuestos por el docente, la pizarra y recursos online.

Todas las cases combinaron una parte teoría y otra practica en la que se desarrolló el contenido manejado ese día como se resolvieron dudas provenientes de temarios anteriores; Razón por lo que esta parte tiene mayor peso frente a la primera produciendo una división desigual del tiempo.

Se pretendió todo momento de la exposición interrelacionar los conceptos que se desarrollaron con los vistos en temas anteriores así como la búsqueda de aplicaciones útiles conforme el perfil del alumnado.

8.2 El cuestionario

Simultáneamente a la fase constructiva de enseñanza-aprendizaje que se desarrolló en el aula se propuso al alumnado y dentro de su actividad autónoma, la realización de dos test/cuestionarios cuyo correcto desarrollo les permitía obtener 2 puntos extras sobre la puntuación del examen final de tercera evaluación (1 punto/test más nota de examen, puntuación máxima 12/10). Institucionalmente no se plantea el examen parcial del tema sino que se realiza un examen final por evaluación.

Los test/cuestionarios para subir nota se debían realizar sin ayuda del profesor y el único requisito para su valoración era realizarlos de forma autónoma y entregarlos en fecha, siendo la fecha límite la fecha del examen. La estructura de ambos cuestionarios era idéntica, estableciendo una cuestión/problema/ejercicio seguida de cuatro soluciones posibles donde solo una de ellas era correcta.

El primer test se conformaba de 10 preguntas, las 5 primeras preguntas se referían al tema 7: Funciones II (límites y análisis de funciones). Y las 5 restantes, exclusivas de tema 8: Integración siendo todas las cuestiones ejercicios de cálculo de integrales indefinidas.

6) El resultado de $\int x^3(e^{3x} - \mathrm{sen}(2x))dx$ es

a) $\dfrac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2-6x-2\right)}{27} + \dfrac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4} + \dfrac{3(1-2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8} + C$

b) $\dfrac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2+6x-2\right)}{27} + \dfrac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4} + \dfrac{3(1+2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8} + C$

c) $\dfrac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2+6x-2\right)}{27} + \dfrac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4} + \dfrac{3(1-2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8} + C$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

Figura 19. Ejemplo pregunta primer test para subir nota

El segundo test, siguiendo la estructura del primero pretendía establecer ejercicios/problemas donde se relacionaban de forma simultanea los conceptos estudiados en los temas de análisis de funciones (límites, derivadas, cortes…) y derivación. Se establecieron 8 preguntas donde se mezclaban ejercicios y problemas, algunos de los cuales, rompían la estructura típica de ejercicios propuestos en selectividad, evitando el mecanicismo en el que suelen caer los estudiantes.

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x+5}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ con a un parámetro real. El valor de a para que $\int_0^3 f(x)\,dx = 15$ es:

a) 2 b) 1 c) $\dfrac{3}{5}$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

Figura 20.1. Ejemplos cuestiones segundo test

4) Dada la función $f(x) = -x^2 + x + 1$, el área del recinto limitado por $y = f(x)$, $y = f'(x)$ es: a) $S = \frac{9}{8}\,u^2$ b) $S = \frac{9}{5}\,u^2$ c) $S = \frac{9}{2}\,u^2$

d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

6) El valor de m (que supondremos positivo) para que el área delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ valga $36\,u^2$ es:

a) $m = 2$ b) $m = 4$ c) $m = 6$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

Figura 20.2. Ejemplos cuestiones segundo test

Así mismo, como ya se ha indicado, se disponía de un examen global de tercera evaluación que permitió establecer la superación o no por parte del alumnado de los conocimientos desarrollados en el tema 7 y tema 8.

El examen/cuestionario constó de 10 preguntas, todas de idéntica puntuación (1 punto). El primer ejercicio requiere el cálculo de integrales indefinidas, el segundo de integrales definidas, el tercero solicitaba el cálculo de un área limita por unas funciones a través de integración. El ejercicio número cuatro estudiaba una característica (máximo) de una función mientras que en el quinto se solicitaba buscar una primitiva concreta de una función dada. El ejercicio número 6 y 7 eran cuestiones sobre integración, el número 8 requería calcular un volumen de revolución. El ejercicio 9 era cálculo sistemático de límites y el ejercicio 10 análisis de funciones.

Estos tres documentos descritos se establecen como las herramientas de estudio de la experimentación. Los documentos completos se adjuntan a este documento como anexos C, D y E respectivamente.

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados.

En general, se prevé que en el examen los alumnos cometan los errores esperables que se nombran en el apartado 6.2 así como las dificultades que se han visto en clase para la resolución de los ejercicios del tema.

Se procede a continuación a analizar las cuestiones del examen relativas al tema de integración comentando sus posibles errores:

Ej.	Enunciado	Posibles dificultades o errores
1 a) b) c)	**Cálcula las siguientes integrales indefinidas** $\int \tan x\,dx$ $\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\,dx$ $\int \frac{4x - 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}\,dx$	Olvidar colocar el diferencial de x (dx). No afecta al resultado, pero podríamos considerarlo como una falta gramatical de la escritura matemática. No se ha penalizado. Prescindir de colocar el más C al final del cálculo, lo que nos indica que solo estamos dando como resultado una primitiva y no el conjunto de todas las primitivas que es la integral indefinida. Olvidar el valor absoluto del logaritmo, cuya primitiva es una funciones racionales que tienen en el numerador un polinomio que se anula para un determinado valor. Errores de cálculo operativo Errores o deficiencias en la factorización de polinomios

Tabla 29.1. Análisis ejercicios del examen

Ej.	Enunciado	Posibles dificultades o errores
2	**Cálculo las siguientes integralas definidas** a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ c) $\int_1^2 (x+x^3)\, dx$	Se añaden a los errores indicadel del ejercicio 1 el mal uso de la Regla de Barrow o desconocimiento de la misma Aplicar linealidad al producto de funciones tal como se aplica en la adicción o sustración. En la integral del segundo apartado, es previsible el uso de integración por partes, si el alumno no es capaz de ver que en la segunda aplicación de la misma vuelve a tener la integral de partida y la toma toda ella como un elemento, entrará en un bucle sin salida. El unico error previsible para el apartado a es que el alumno no sepa ver que la derivada del denominador es el numerador multiplicado por -1. Integral directa.
3	**Cálculo el área del recinto limitado por las funciones:** $y = x + 1$ $y = x^3 + 2x^2 - 1$	Dar cómo área el valor de la integral entre los límites dados sin observar el signo de la misma. Esto puede presentar situaciones de dar como respuesta un área negativa o inferior a la buscada. Dar el área como la integral entre los límites dados sin observar si hay cortes con el eje OX entre los mencionados límites.
5	**Halla una primitiva de $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5}^{-\boldsymbol{x}}$ que se anule en *x=0***	Error como consecuencia de deficiencia del concepto matemático que alberga la integral indefinida. El alumno debe encontrar la integral indefinida para posteriormente a partir del concepto de la misma, buscar cual de todas las primitivas cumple la condidción requerida.
6	**Sea $f(\boldsymbol{x}) = \int_1^t \frac{1}{t} \boldsymbol{dt}$, y sean a,b$\in \boldsymbol{R}^+$. Demuestra que $\boldsymbol{f}$(a,b)=$\boldsymbol{f}$(a)+$\boldsymbol{f}$(b)**	Este ejercicio puede considerarse una cuestión8 teorica, ya que el propio teorema Fundamental de Integración (desarrollado en la tabla 21) es la respuesta. El error o no realización correcta de la misma, es una falta manifiesta de conceptos teóricos vinculados con el tema.
7	**Se sabe que $\int_a^b f(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \mathbf{0}$. ¿Se puede asegurar que a=b?. Razona la respuestas**	Error en la interpretación de área bajo la curva
8	**Encuentra el volumen generado por la siguiente función al rotar sobre el eje X:** $x^2 + y^2 = 64, x \in [5,8]$	Colocar bajo un símbolo de integral dos variables distintas. Es necesario hacer operaciones previas en la ecuación dada para proceder al cálculo del volumen. Aplicar erroneamente la formula y despejar y en vez de y^2

Tabla 29.2. Análisis ejercicios del examen

8.4. Resultados

Para el desarrollo de esta sección solo podemos contar con los resultados obtenidos en el examen, ya que ningún alumno precedió a entregar ninguno de los dos test propuestos para la obtención de dos puntos extras sobre la nota del mismo.

El ejercicio examinatorio se ha realizó posteriormente a la finalización de las prácticas, por lo que se me han facilitado desde el centro los ejercicios de los únicos cinco alumnos que se presentaron al mismo. El reducido número de alumnos responde a que la mayoría de los alumnos ya habían abandonado la asignatura o el Bachillerato durante el transcurso del año.

Antes de proceder a estudiar las respuestas realizadas, resulta interesante comentar que los bajos resultados obtenidos por el grupo eran previsibles, tanto por la falta de asistencia del alumnado a clase, que predecía un abandono de la asignatura por el mismo. Así como la falta de motivación personal observada a la hora de obtener unos resultados óptimos. Es decir, este examen hace media con los resultados anteriores por lo que el alumno conoce cuál es la puntuación mínima que requiere para la superación de la asignatura y es esta la meta que se ponen (hecho que se ratifica en la falta de interés mostrado por obtener puntos extras) con las consecuencias que ello conlleva.

En primer lugar se añade una tabla donde se reflejan los resultados obtenidos por los cinco alumnos en las diferentes cuestiones planteadas:

Ej.	Enunciado	Alumno1	Alumno2	Alumno3	Alumno4	Alumno5
1	**Cálcula las siguientes integrales indefinidas**					
a)	$\int \tan x \, dx$	--	☺	X	☺	--
b)	$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx$	--	☺	X	X	☺
c)	$\int \frac{4x - 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$	--	☺	X	☺	±
2	**Cálculo las siguientes integralas definidas**					
a)	$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$	X	☺	X	--	--
b)	$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$	X	☺	X	--	--
c)	$\int_1^2 (x + x^3) \, dx$	☺	☺	X	--	±
3	**Cálculo el área del recinto limitado por las funciones:** $y = x + 1$ $y = x^3 + 2x^2 - 1$	--	☺	X	--	X
5	**Halla una primitiva de** $f(x) = 5^{-x}$ **que se anule en** ***x=0***	--	--	--	±	--
6	**Sea** $f(x) = \int_1^t \frac{1}{t} dt$**, y sean a,b∈** R^+**. Demuestra que** f**(a,b)=**f**(a)+**f**(b)**	--	--	--	--	--
7	**Se sabe que** $\int_a^b f(x) \, dx = 0$**. ¿Se puede asegurar que a=b?. Razona la respuestas**	--	--	X	X	--
8	**Encuentra el volumen generado por la siguiente función al rotar sobre el eje X:** $x^2 + y^2 = 64, x \in [5,8]$	☺	±	X	--	--

Leyenda simbolos:

- ☺ Ejercicio resuelto correctamente
- ± Ejercicio resuelto con fallos
- X Ejercicio no resuelto
- -- Ejercicio que no se ha intentado resolver

Tabla 29. Análisis de los resultados del examen

Se procede a continuación a comentar algunas de las respuestas, especialmente aquellas que tienen que ver con los errores que habíamos planteado como previsibles.

- Error de escritura matemática.

El alumno no escribe en ningún momento el dx debajo de un signo de integración. El alumno en primer lugar utiliza la regla básica de integración para sacar la constante (π) de la integral. Posteriormente la omite hasta el final del proceso donde determina que el volumen total será el producto de la constante por un valor (sin unidades) que ha obtenido de su cálculo. Establecemos un uso incipiente de la herramienta no consolidado que conlleva un manejo impreciso.

Además presenta bastante desorden en sus desarrollos matemáticos lo que le da lugar a varios errores de transcripción a lo largo del examen.

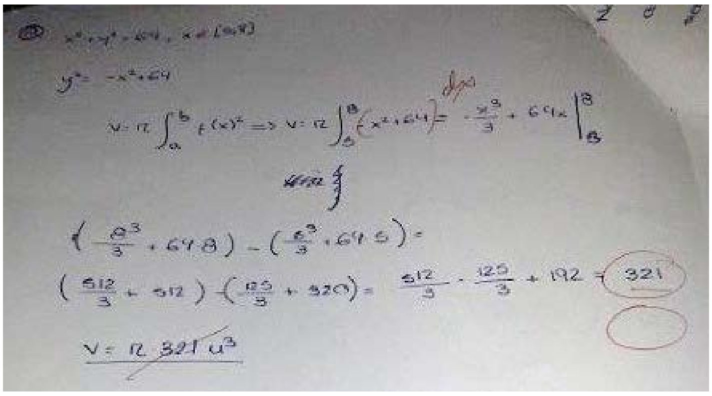


Figura 21. Error observado en el examen final

- Error en el concepto de Integral Indefinida

Sólo se presenta una de las infinitas soluciones que conforman la integral indefinida

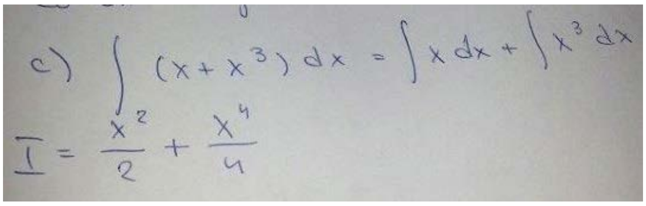


Figura 22. Error observado en el examen final

- Error de identificación de la parte como unidad

El alumno percibe que la herramienta utilizada (integración por partes) no le permite salir del bucle creado entre el seno y el coseno en la derivación de estas funciones. Frente a este conocimiento ya integrado, no sabe encontrar solución al mismo, para lo cual tiene que entender la integral como un elemento (incógnita) con la que trabajar, de la misma manera que trabaja con la "*x*" o la "*y*" en la resolución de ecuaciones.

Únicamente el alumno que asistió a clase cuando se vio este tipo de integral la ha realizado correctamente (este apartado fue resuelto en clase el día de repaso anterior a la prueba)

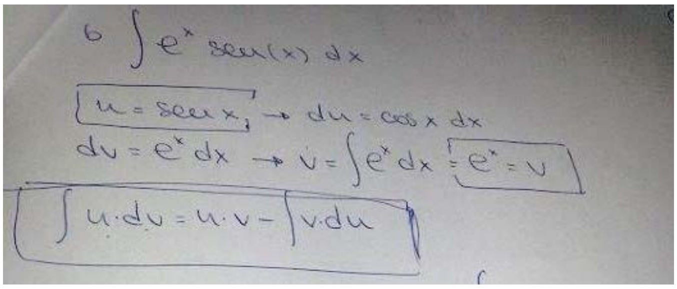


Figura 23. Error observado en el examen final

- Aplicación de la Regla de la Cadena para la resolución de una Integral Definida.

El alumno utiliza la regla de la cadena tanto para cocientes de funciones como para el producto. Se produce una extrapolación directa de las herramientas conocidas para la resolución de derivadas a la resolución de integrales.

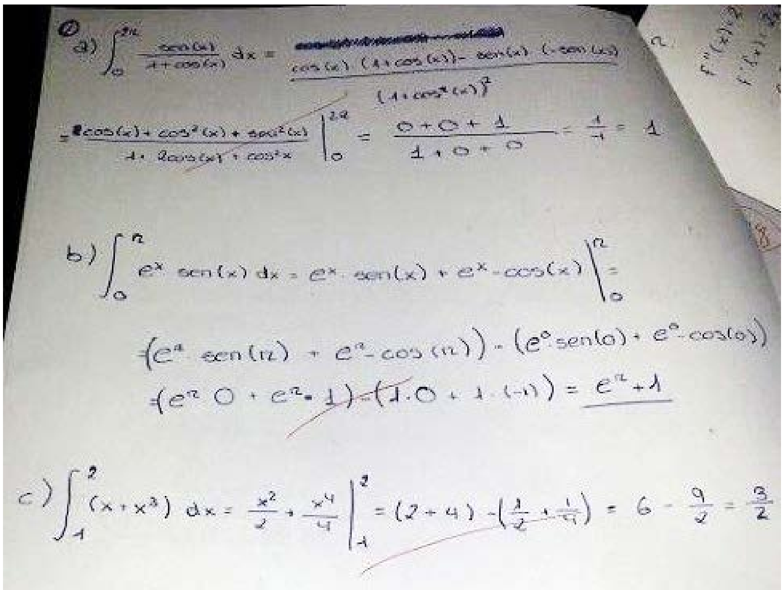


Figura 24. Error observado en el examen final

- Dominio de la función: $R-\{2\}$.

En la tercera integral el dominio de la función del denominador es R$-\{2\}$. Por lo que la primitiva es el $\frac{8}{3}\ln|x-2|+C$,en valor absoluto (ver justificación en la tabla 24)

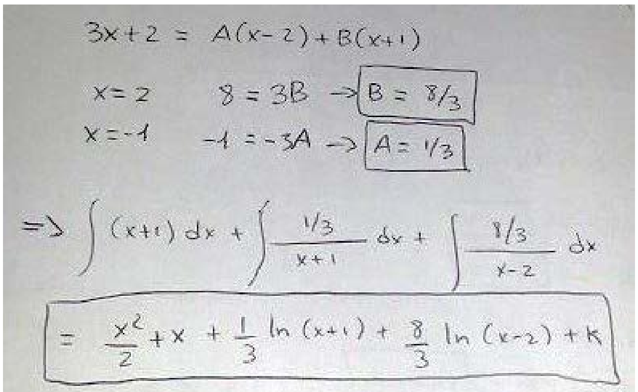


Figura 25. Error observado en el examen final

– Uso excesivo de la memoria frente a la razón

El alumno reconoce estructuras de las integrales directas o semi-directas, pero no establece las relaciones adecuadas. Este error puede solucionarse si reescribimos la función tangente como el sinx/cos x. De este modo si multiplicamos por (-1) tenemos una integral directa del tipo *ln(x)+C*

Debemos enseñar al alumno no utilizar exclusivamente la memorización de fórmulas apostando por la deducción matemática de las mismas.

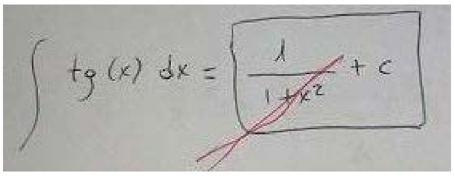


Figura 26. Error observado en el examen final

– Cálculo de áreas sin tener en cuenta el signo de la función

Al tomar por separado las funciones y no calcular la integral de la resta de las mismas, el alumno debe trabajar con los valores absolutos del área para impedir que el área se vea reducida como consecuencia del cálculo de medidas. No obstante, si tiene en cuenta los puntos de corte con el eje.

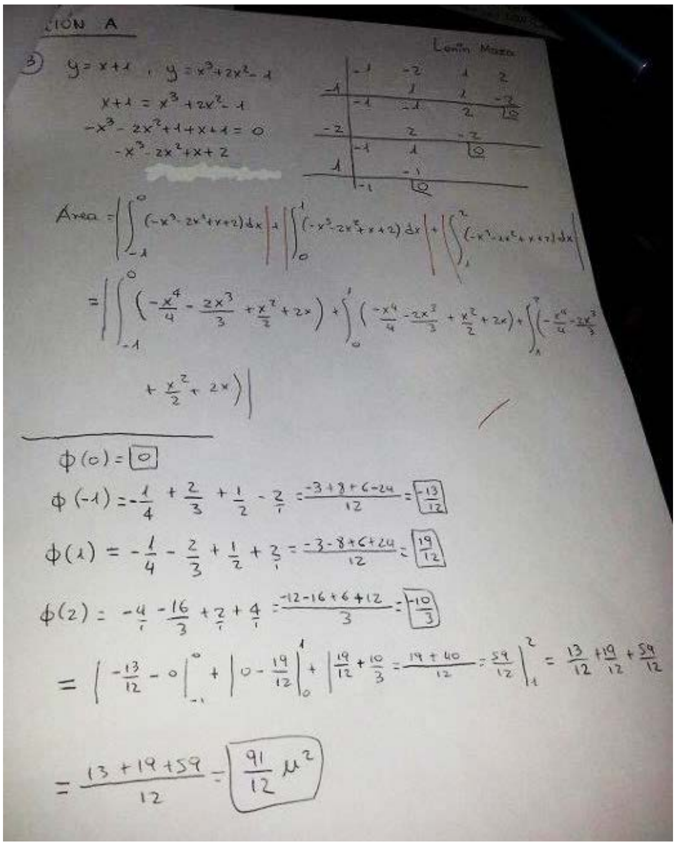


Figura 27. Error observado examen final

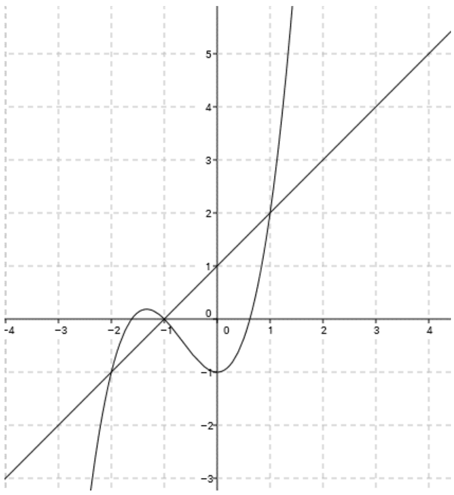


Figura 28. Representación gráfica del problema calculado con GeoGebra

8.5. Discusión de los resultados

Como ultima fase de la ingenería didáctica, se procede a validar o refutar las previsiones planteadas en el análisis a priori.

Como se esperaba, la mayoría del alumnado presentó grandes dificultades para enfrentarse a los ejercicios propuestos. Unícamente el alumno que presentaba una presencia asidua a clase realizó el ejercicio examinatorio, en computos generales, de forma correcta.

La excased de produciones obtenidas no nos permiten realizar un estudio expansivo, no obstante, se puede a priorí concluir de forma generalizada que:

La modalidad a distancia, frente a los convenientes de flexibilidad que presenta no parece conllevar al exíto del fin propuesto (obtención del titulo de Bachillerato) en la mayoria de alumnado.

La presencia a clase para la institucionalización de los conceptos a desarrollar, es un punto clave para el éxito.

Por otro lado, y ya bajo los datos reclutados, el concepto visual de área bajo una curva parece resultar sencillo para la interpretación por parte de la mayoria de alumnado, pero la falta de herramientas o conceptos matemáticos les impide la correcta ejecución del cálculo de la misma

El hecho de que el tema de integración se encuentre el último dentro del programa, es una consecuencia de su dependencia del resto de conceptos desarrollados anteriormente. En este caso parece que el alumnado se ha “deshinchado” durante el proceso llegando exhaustos al final del mismo. De hecho, los resultados muestran que la resolución correcta por parte del alumnado de ejercicios de límites es muy superior a los referidos a derivadas y estos a su vez, superan a los relacionados con la integración.

Otra conclusión llamativa del grupo, es la capacidad de realizar ejercicios mecánicos de forma generalizada y no intentar aquellos que requieren interpretación. Este hecho se justifica bajo la premisa de que la aptitud de este alumnado es asegurarse una serie de puntos y por tanto, muestran una clara inclinación hacia lo mecánico.

Me resulta intrigante que nadie haya sido capaz de realizar correctamente el ejercicio número 7, ya que estaba dentro de los ejercicios propuestos en el tema, solucionado en el solucionario facilitado por el profesor y además realizado en tutoría colectiva. Este hecho, solo se puede justificar bajo una falta generalizada de dedicación al tema.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

Si se analiza todo el conjunto de forma general, se puede establecer que la enseñanza de esta materia a nivel educativo se organiza en forma de espiral, donde cada concepto se introduce en relación a conocimientos de partida, a priori consolidados en el alumnado. Sin embargo, asegurar que tal consolidación se ha producido en efecto resulta complicado de verificar e institucionalizar.

Se ha encontrado en el estudio realizado una relación bastante coherente entre el currículo y los libros de texto editados para tal fin por las editoriales analizadas, viendo cómo de forma generalizada los manuales superan el nivel establecido de mínimos desarrollando nuevas aplicaciones o adelantando conceptos de cursos superiores con el fin de establecer una mejor preparación, a futuro, del estudiante.

Sin embargo, se ha constatado que en la mayoría de los manuales, y extrapolando, en muchas aulas, se abusa de una didáctica basada en la exposición magistral de conceptos seguidos de una batería de ejercicios que fomentan los aspectos mecánicos y no los conceptuales. Es posible que este hecho de basarse en ejercicios frente a problemas y situaciones facilite el trabajo de docentes, ya que permite encontrarse cómodo y seguro frente al proceso pedagógico. Centramos las calificaciones en pruebas regladas o “semi-entrenadas” que validan unos conocimientos establecidos frente al control de la adquisición real y asentamiento de los mismos. Este aspecto, tiene sus consecuencias en procesos educativos superiores donde se pone de manifiesto la falta de “cimientos” del alumnado, frente a una trayectoria educativa anterior exitosa.

Este contexto institucional (libros de texto y currículo), nos marca la referencia para el proceso de estudio de la integral llevada a cabo en segundo de Bachillerato. A partir del manual facilitado por el centro, así como las reflexiones anteriormente planteadas se propuso la necesidad de contextualizar y motivar al alumnado en este último tema. Dicha experimentación, como ya se ha comentado, no se pudo desarrollar en su totalidad, y por tanto, tampoco podemos predecir su efectividad dentro del alumnado.

Conclusiones

Las conclusiones de la experimentación son bastante limitadas. En primer lugar, se ha visto necesario la necesidad de involucrar al alumnado en el tema, por lo que la primera fase de motivación propuesta se prevé de gran utilidad.

Se ha comprobado que el alumnado no dispone de un dominio eficaz de análisis. La resolución de problemas mecanizados les resulta cosa complicada y ni siquiera muestran un interés personal para enfrentarse a conceptos más teóricos.

Aunque determinamos que el proceso de enseñanza seguido es correcto, podemos concluir que, el tiempo dedicado es insuficiente. También se puede concluir que faltan conceptos básicos de álgebra y cálculo.

Frente a la premisa anteriormente indicada, se ha comprobado que el alumnado que acudía a clase habitualmente, y mantenía un contacto con la asignatura y el profesor de forma continuada, no ha encontrado problemas a la hora de desarrollar las ideas y conceptos matemáticos involucrados adecuadamente.

Cuestiones abiertas

Queda abierto, por un lado, el análisis de las dificultades que conlleva el estudio de una asignatura tan práctica, y fundada en el entendimiento, como son las matemáticas en la modalidad a distancia.

Por otro lado, y centrándonos en los problemas encontrados, se plantea la necesidad de plantear diferentes métodos de evaluación que permitan o requieran más bien un esfuerzo superior del alumno que una mera "preparación hacia un ejercicio tipo". Resulta necesario evaluar la capacidad de interpretar y analizar críticamente soluciones y problemas frente a la capacidad de memorizar conceptos y seleccionar las herramientas apropiadas para la resolución de problemas.

Respecto a la metodología aplicada se prevé muy complicado poder llegar a plantear el trabajar a través de resolución de problemas. Esto se apoya en que la falta de conexión real con el profesorado, que establece la modalidad a distancia, dificultaría en exceso la guía del desarrollo por parte de éste. Esta metodología implicaría, si aún cabe, un mayor compromiso por parte del alumno.

Si nos centramos en la dedicación del alumnado, resulta evidente que en este caso ha sido deficiente, pero ¿es consecuencia de las carencias anteriores que acarrea el alumnado? ¿Habría un mayor compromiso si la enseñanza se realizase mediante sesiones inductivas en vez de deductivas? Posiblemente, el hecho de combinar ambas enriquecería la actividad de éste, sin embargo es difícil predecir, como consecuencia de la tipología de alumnado, el grado de implicación o de compromiso con la asignatura en función de sus circunstancias laborales, familiares, institucionales….

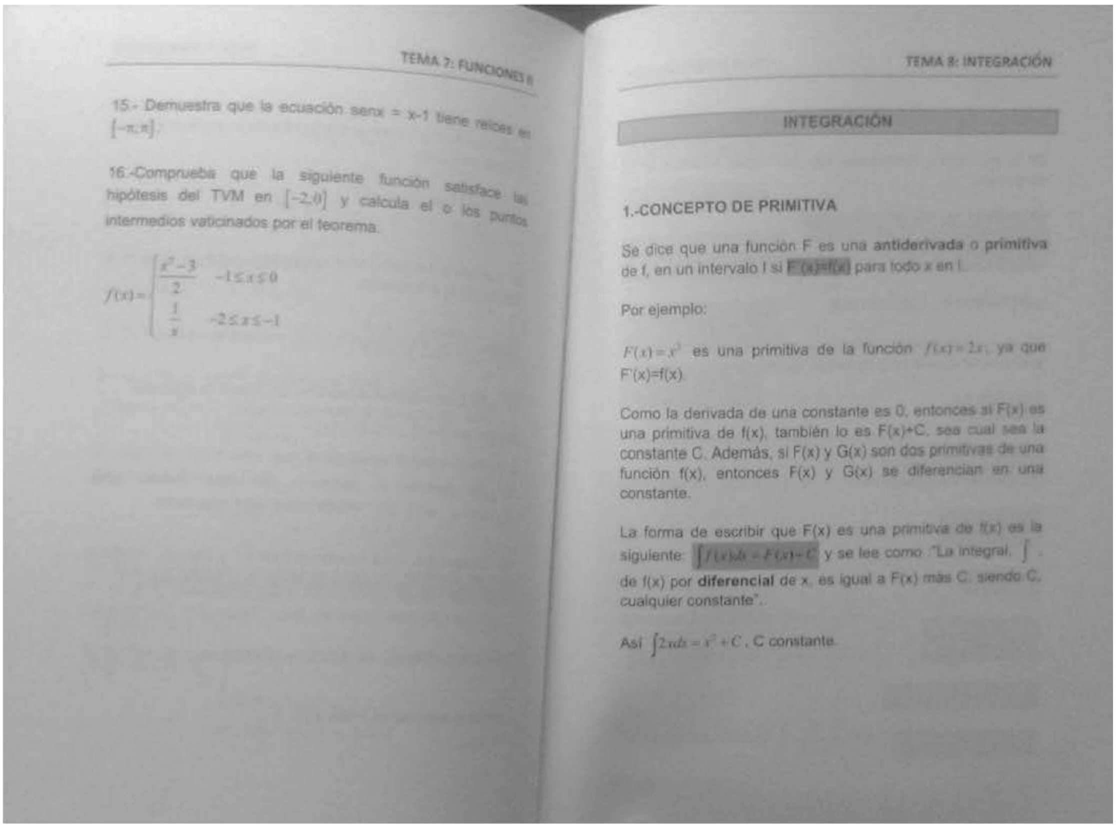
Referencias

- Purificación Montesinos Comino, Alejandro Montesinos Matilla, Francisco González Díaz, Begoña Martínez Elgarresta (2008) *Matemáticas opción A 4º ESO*. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.
- Purificación Montesinos Comino, Alejandro Montesinos Matilla, Francisco González Díaz, Begoña Martínez Elgarresta (2008) *Matemáticas opción B* 4º ESO. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.
- José María Martínez Mediano, Rafael Cuadra López, Adolfo Heras Redondo (2008) *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1º Bachillerato*. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.
- Mónico Cañada Gallardo, Julia Gómez Nadal, Manuel Gordillo Bardón, Mª Lourdes Moreno Balconero, José Ángel Ortega Dato, Juan Francisco Ortega Dato, Ana J. Pérez López (2009) *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato- Método @pruebas*. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.
- Esther Bescos i Escruela, Zoila Pena i Terrén (2008) *Matemáticas 1º Bachillerato*-colección Tesela. Editorial Oxford University Press España, S.A.
- Ramón Munsuri Fernandez (2010) *Matemáticas II 2º de Bachillerato*. Editorial Sahats Servicios Editoriales.
- Juan D. Godino, V. Font, M.R. Wilhelmi (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Relime Número, Especial, 2006, pp.131-155
- Pilar Turégamo Moratalla (1997). El aprendizaje del concepto de integral. Suma 26, noviembre, pp.39-52
- Larson-Hostetler (1995) Cálculo y Geometría Analítica, Tercera Edición. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Solucionario actividades tema 8: Integración
C. Primera prueba opcional para subir nota
D. Segunda prueba opcional para subir nota
E. Examen tercera evaluación

A. Unidad didáctica del libro de texto



TEMA 7: FUNCIONES II

15.- Demuestra que la ecuación senx = x-1 tiene raíces en $[-\pi,\pi]$.

16.-Comprueba que la siguiente función satisface las hipótesis del TVM en $[-2,0]$ y calcula el o los puntos intermedios vaticinados por el teorema.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3}{2} & -1\le x\le 0\\ \frac{1}{x} & -2\le x\le -1\end{cases}$$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

INTEGRACIÓN

1.-CONCEPTO DE PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada** o **primitiva** de f, en un intervalo I si F'(x)=f(x) para todo x en I.

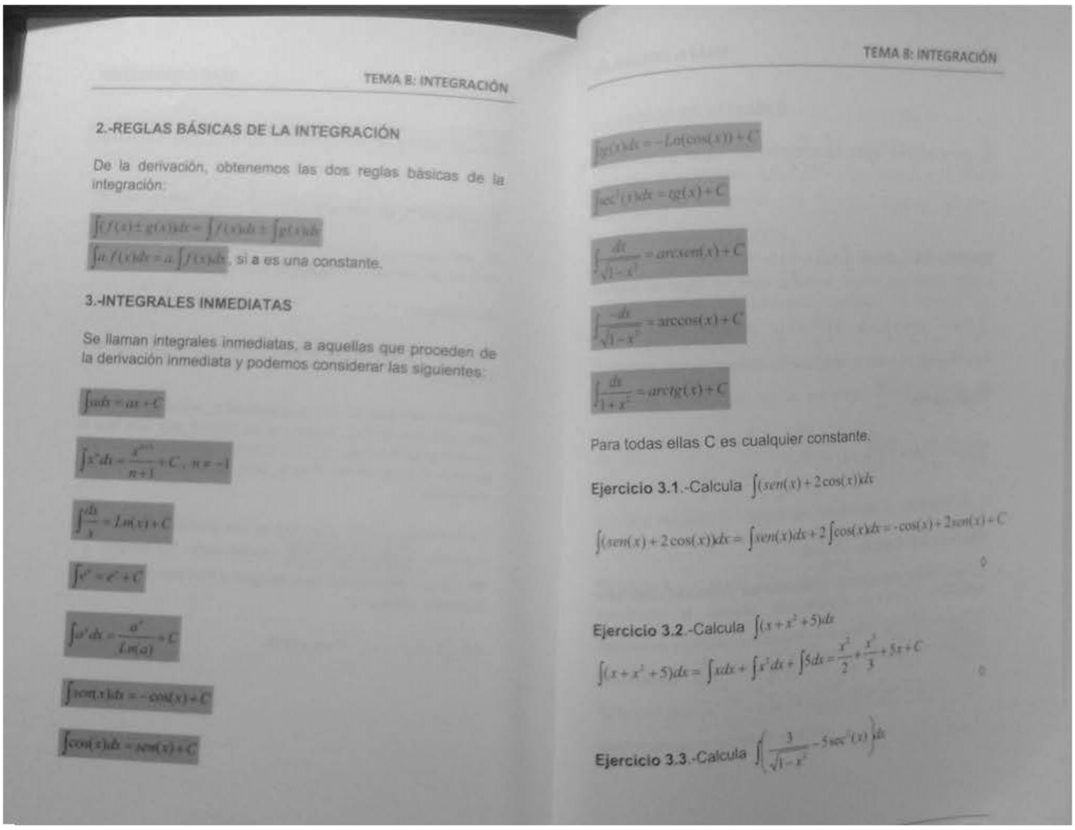
Por ejemplo:

$F(x)=x^2$ es una primitiva de la función $f(x)=2x$, ya que F'(x)=f(x).

Como la derivada de una constante es 0, entonces si F(x) es una primitiva de f(x), también lo es F(x)+C, sea cual sea la constante C. Además, si F(x) y G(x) son dos primitivas de una función f(x), entonces F(x) y G(x) se diferencian en una constante.

La forma de escribir que F(x) es una primitiva de f(x) es la siguiente: $\int f(x)dx=F(x)+C$ y se lee como "La integral, $\int$, de f(x) por **diferencial** de x, es igual a F(x) más C, siendo C, cualquier constante".

Así $\int 2x dx = x^2+C$, C constante.



TEMA 8: INTEGRACIÓN

2.-REGLAS BÁSICAS DE LA INTEGRACIÓN

De la derivación, obtenemos las dos reglas básicas de la integración:

$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

$\int a\cdot f(x)dx=a\cdot\int f(x)dx$, si a es una constante.

3.-INTEGRALES INMEDIATAS

Se llaman integrales inmediatas, a aquellas que proceden de la derivación inmediata y podemos considerar las siguientes:

$\int a dx = ax + C$

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$

$\int \frac{dx}{x}=Ln(x)+C$

$\int e^x = e^x + C$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{Ln(a)}+C$

$\int sen(x)dx=-\cos(x)+C$

$\int \cos(x)dx=sen(x)+C$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$\int tg(x)dx=-Ln(\cos(x))+C$

$\int \sec^2(x)dx=tg(x)+C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsen(x)+C$

$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos(x)+C$

$\int \frac{dx}{1+x^2}=arctg(x)+C$

Para todas ellas C es cualquier constante.

Ejercicio 3.1.-Calcula $\int (sen(x)+2\cos(x))dx$

$\int (sen(x)+2\cos(x))dx=\int sen(x)dx+2\int \cos(x)dx=-\cos(x)+2sen(x)+C$

Ejercicio 3.2.-Calcula $\int (x+x^2+5)dx$

$\int (x+x^2+5)dx=\int x dx+\int x^2dx+\int 5dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+5x+C$

Ejercicio 3.3.-Calcula $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-5\sec^2(x)\right)dx$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-5\sec^2(x)\right)dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-5\int 5\sec^2(x)dx=3arcsen(x)-5tg(x)+C$$

◊

Ejercicio 3.4.-Calcula $\int\left(5\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx$

$$\int\left(5\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx=5\int\sqrt{x}dx-2\int\frac{dx}{x}=5\int x^{1/2}dx-2\int\frac{dx}{x}=5\frac{x^{3/2}}{3/2}-2Ln(x)+C$$

Simplificamos:

$$\int\left(5\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{10\sqrt{x^3}}{3}-2Ln(x)+C$$

◊

Ejercicio 3.5.-Calcula $\int\frac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$

En este caso, trabajamos operamos las potencias cuya base es x:

$$\int\frac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^{1/10}}{x^1x^{1/2}}dx=\int x^{-7/5}dx=\frac{x^{-2/5}}{-2/5}+C=\frac{-5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$$

◊

TEMA 8: INTEGRACIÓN

4.-CAMBIOS DE VARIABLE

Siguiendo la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas, $(f(g(x))'=f'(g(x)).g'(x)$ y lo mismo ocurre para la integración: Si $\int f(x)dx=F(x)+C$, entonces $\int f(g(x)).g'(x)dx=F(g(x))+C$.

Aunque la regla es muy práctica, suele ser difícil verla a menudo, por lo que utilizamos cambios de variable, por ejemplo para F(ax+b):

Tomamos como cambio de variable $u=ax+b$, para lo cual derivamos **u** respecto de **x**, es decir $\frac{du}{dx}=a$ y por tanto $\frac{dx}{du}=\frac{1}{a}$, además $dx=\frac{dx}{du}du=\frac{du}{a}$, entonces:

$$\int F(ax+b)dx=\int F(u)\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int F(u)du.$$

Una vez resuelta la integral en función de **u**, deshacemos el cambio de variable sustituyendo **u** por **ax+b**.

Ejercicio 4.1.-Calcula $\int(2x+3)^7dx$

Tomamos el cambio de variable $u=2x+3$, entonces derivamos y obtenemos que du=2dx o bien $dx=\frac{du}{2}$.

Sustituimos:

$$\int(2x+3)^7dx=\int u^7\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^7du=\frac{1}{2}\frac{u^8}{8}+C=\frac{u^8}{16}+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$$\int(2x+3)^7dx=\frac{(2x+3)^8}{16}+C$$

◊

Ejercicio 4.2.-Calcula $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Tomamos $u=5x-2$ y por tanto $du=5dx \Rightarrow dx=\frac{du}{5}$

Sustituimos:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{5}\int u^{-1/2}du=\frac{1}{5}\frac{u^{1/2}}{1/2}+C=\frac{2}{5}\sqrt{u}+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C$$

◊

Ejercicio 4.3.-Calcula $\int e^{6x-1}dx$

Tomamos $u=6x-1$ por lo que $du=6dx \Rightarrow dx=\frac{du}{6}$

Sustituimos:

$$\int e^{6x-1}dx=\frac{1}{6}\int e^u du=\frac{1}{6}e^u+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int e^{6x-1}dx=\frac{e^{6x-1}}{6}+C$$

◊

TEMA 8: INTEGRACIÓN

Ejercicio 4.4.-Calcula $\int sen(3x-2)dx$

Tomamos $u=3x-2$ por lo que $du=3dx \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

Sustituimos:

$$\int sen(3x-2)dx=\frac{1}{3}\int sen(u)du=\frac{-\cos(u)}{3}+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int sen(3x-2)dx=\frac{-\cos(3x-2)}{3}+C$$

◊

Ejercicio 4.5.-Calcula $\int\frac{dx}{7x+1}$

Tomamos $u=7x+1$ por lo que $du=7dx \Rightarrow dx=\frac{du}{7}$

Sustituimos:

$$\int\frac{dx}{7x+1}=\frac{1}{7}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{7}Ln(u)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\frac{dx}{7x+1}=\frac{1}{7}Ln(7x+1)+C$$

◊

Ejercicio 4.6.-Calcula $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-2x-10}$

Como la derivada de $x^2-2x-10$ es $2x-2=2(x-1)$ y aparece en el numerador $x-1$, tomamos el cambio de variable

$u = x^2 - 2x - 10$, entonces $du = 2(x-1)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$ y sustituimos en la integral original:

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x-10} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}Ln(u) + C = \frac{1}{2}Ln(x^2-2x-10) + C.$$

◊

5.-INTEGRACIÓN POR PARTES

Se le llama así, al método de integración que proviene del producto. Si u y v son dos funciones, entonces $(u.v)' = u.v' + v.u'$ ó $d(u.v) = u.dv + v.du$, es decir:

$\int u.v' = uv - \int u'.v$

Podemos extender esta fórmula para la segunda derivada, ya que:

$(u.v' - u'.v)' = \cancel{u'.v'} + u.v'' - u''v - \cancel{u'.v'}$, es decir:

$\int u.v'' = u.v' - u'.v + \int v.u''$.

Para la derivada tercera:

$\int u.v''' = u.v'' - u'.v' + u''.v - \int v.u'''$ y así sucesivamente.

Ejercicio 5.1.-Calcula $\int x.sen(3x-2)dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = sen(3x-2) \Rightarrow v = \frac{-\cos(3x-2)}{3}$

De donde:

$$\int x.sen(3x-2)dx = \frac{-x\cos(3x-2)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x-2)dx$$

$$\int x.sen(3x-2)dx = \frac{-x\cos(3x-2)}{3} + \frac{sen(3x-2)}{9} + C$$

◊

Ejercicio 5.2.-Calcula $\int Ln(x)dx$

$u = Ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \Rightarrow v = x$

$\int \ln x\, dx = x.\ln x - \int x.(1/x).dx = x.\ln x - x + C$ ◊

Ejercicio 5.3.-Calcula $\int x.e^x dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int x.e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$ ◊

Ejercicio 5.4.-Calcula $\int x^2.\cos(2x)dx$

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow u'' = 2$

$v'' = \cos(2x) \Rightarrow v' = \frac{sen(2x)}{2} \Rightarrow v = \frac{-\cos(2x)}{4}$

$$\int x^2.\cos(2x)dx = x^2\frac{sen(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \int \frac{\cos(2x)}{2}dx$$

$$\int x^2.\cos(2x)dx = x^2\frac{sen(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{sen(2x)}{4} + C$$

◊

Ejercicio 5.5.-Calcula $\int arctg(x)dx$

$u = arctg(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2}$

$v' = 1 \Rightarrow v = x$

$\int arctg(x)dx = x.arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x.arctg(x) - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + C$

◊

6.-INTEGRALES RACIONALES

Se trata de calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Cuando el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$, dividimos los polinomios, de tal forma que $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$.

Entonces, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x).C(x)+R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, por lo que:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$

Cuando el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, factorizamos la fracción, como suma de fracciones simples, dependiendo de cada uno de los casos que iremos viendo.

Caso 1: **El denominador tiene sólo raíces reales simples**:

$Q(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)....$

Entonces

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A/\alpha}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ...$ y tras calcular las constantes A, B, C, ...

Tenemos que $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A}{\alpha}\int \frac{dx}{x-a} + B\int \frac{dx}{x-b} + C\int \frac{dx}{x-c} + ...$ y por tanto:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A}{\alpha}Ln(x-a) + B.Ln(x-b) + C.Ln(x-c) + ...$

Ejercicio 6.1.-Calcula $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, factorizamos la fracción como suma de fracciones simples.

Resolvemos $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Entonces:

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$$\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$

Operamos y obtenemos que:

$$\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4} \Rightarrow 5x-2=A(x-2)+B(x+2)$$

Ahora le damos valores a la x, para calcular A y B:

Si $x=2 \Rightarrow 8=B.4 \Rightarrow B=2$. Si $x=-2 \Rightarrow -12=-4.A \Rightarrow A=3$.

Por tanto:

$$\int\frac{5x-2}{x^2-4}dx=\int\frac{3}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-2}dx.$$

Y finalmente: $\int\frac{5x-2}{x^2-4}dx=3.Ln(x+2)+2Ln(x-2)+C$.

◊

Ejercicio 6.2.-Calcula $\int\frac{2x-3}{x^3-x}dx$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, factorizamos la fracción como suma de fracciones simples.

Resolvemos $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm 1$.

Entonces:

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$$\frac{2x-3}{x^3-x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\,x(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)x}{(x+1)x(x-1)}$$

Calculamos A, B y C, sustituyendo $x=0, x=1$ y $x=-1$ en la expresión:

$$2x-3=Ax(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)x$$

Y obtenemos que:

$$A=\frac{-5}{2}, B=3, C=\frac{-1}{2}$$

Por tanto $\int\frac{2x-3}{x^3-x}dx=\frac{-5}{2}Ln(x+1)+3.Ln(x)-\frac{1}{2}Ln(x-1)+C$

◊

Ejercicio 6.3.-Calcula $\int\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, dividimos la fracción algebraica.

$\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}=3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}$, por lo que:

$$\int\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx=\int(3x+3)dx+\int\frac{14x+6}{x^2-x-2}dx$$

Ahora reducimos la fracción: $\frac{14x+6}{x^2-x-2}$ y nos queda que:

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$\frac{14x+6}{x^2-x-2}=\frac{34/3}{x-2}+\frac{8/3}{x+1}$, y finalmente calculamos la integral que nos piden:

$$\int\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx=\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{34}{3}Ln(x-2)+\frac{8}{3}Ln(x+1)+C$$

◊

Ejercicio 6.4.-Calcula $\int\frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, dividimos la fracción algebraica.

$\frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}=x^2+6x+10+\frac{25}{x-2}$, entonces:

$\int\frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx=\int(x^2+6x+10)dx+\int\frac{25}{x-2}dx$, y finalmente:

$$\int\frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx=\frac{x^3}{3}+3x^2+10x+25Ln(x-2)+C$$

◊

Caso 2: **El denominador tiene raíces reales múltiples**:

Para cada raíz múltiple que posea el denominador, es decir $Q(x)=Z(x).(x-a)^n$, hay que expresar la fracción algebraica como suma de fracciones algebraicas reducidas, de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\text{Resto}$$

Si Q posee raíces simples y múltiples, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se expresa como la suma de las fracciones reducidas de las raíces simples más la suma de las fracciones reducidas de las raíces múltiples.

Ejercicio 6.5.-Calcula $\int\frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

Factorizamos el denominador: $Q(x)=(x-1)^2(x-2)$, entonces:

$$\frac{5x^2-11x+5}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

Calculamos los valores de A, B y C sumando las fracciones algebraicas del segundo término de la igualdad e igualando.

$$5x^2-11x+5=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$$

Le damos valores a la x, por ejemplo $x=2$, $x=1$ y $x=0$ y obtenemos que $A=1$, $B=2$ y $C=3$. Entonces:

$$\int\frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x-2}dx$$

Y finalmente:

$$\int \frac{5x^2-11x+5}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \frac{-1}{x-1} + 2Ln(x-1) + 3Ln(x-2) + C_1$$

◊

Ejercicio 6.6.-Calcula $\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx$

$x^3+4x^2+5x+2=(x+2)(x+1)^2$. Entonces:

$\frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$, operamos, igualamos y calculamos las constantes A, B y C. => $A=2,\ B=-2\ y\ C=3$.
Por tanto:

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

$\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx = \int \frac{2dx}{x+2} - \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{3dx}{(x+1)^2}$. Finalmente:

$$\int \frac{x+4}{x^3+4x^2+5x+2}dx = 2Ln(x+2) - 2Ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C_1$$

◊

Caso 3: **El denominador posee raíces complejas**:

Si Q(x) posee una raíz compleja z=a+bi, tenemos en cuenta la propiedad que dice que dado polinomio con coeficientes reales, si z complejo, es raíz del polinomio, entonces también $\bar{z}$, el conjugado de z, también es raíz de ese mismo polinomio.

Entonces
$Q(x) = H(x)(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = H(x)((x-a)^2+b^2)$, y por tanto la fracción algebraica, puede expresarse como:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} + ...$, por lo que al integrar:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Ax.dx}{(x-a)^2+b^2} + \beta.arctg\frac{x-a}{b} + ...$$

Ejercicio 6.7.-Calcula $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$

$x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}i$, es decir:

$\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2}$, hacemos el cambio de variable $u=\frac{x-1}{\sqrt{2}}$, con $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, o bien $\frac{dx}{du}=\sqrt{2}$, y la integral se transforma en:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2} = \sqrt{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{2}\ arctg(u) + C$$
$$= \sqrt{2}\ arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

◊

Ejercicio 6.8.-Calcula $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

Dividimos x^2 entre x^2+1. El cociente es 1 y el resto - 1.

Es decir: $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

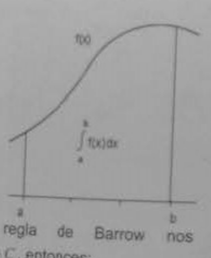
Por tanto:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - arctg\ x + C$$

◊

7.-INTEGRAL DEFINIDA

Llamamos integral definida de una función f(x) en un intervalo $[a,b]$, a la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, cuyo valor coincide con el área de la región limitada entre los puntos a y b del eje X y la función f(x). Geométricamente:



Además, la regla de Barrow nos dice que si $\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Propiedades:

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$, si F(x) es una primitiva de f(x).

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$, si F(x) es una primitiva de f(x).

Ejercicio 7.1.-Calcula $\int_{-1}^{1}(3x^3-x^2+x-1)dx$

$$\int_{-1}^{1}(3x^3-x^2+x-1)\,dx = \left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{8}{3}$$

◊

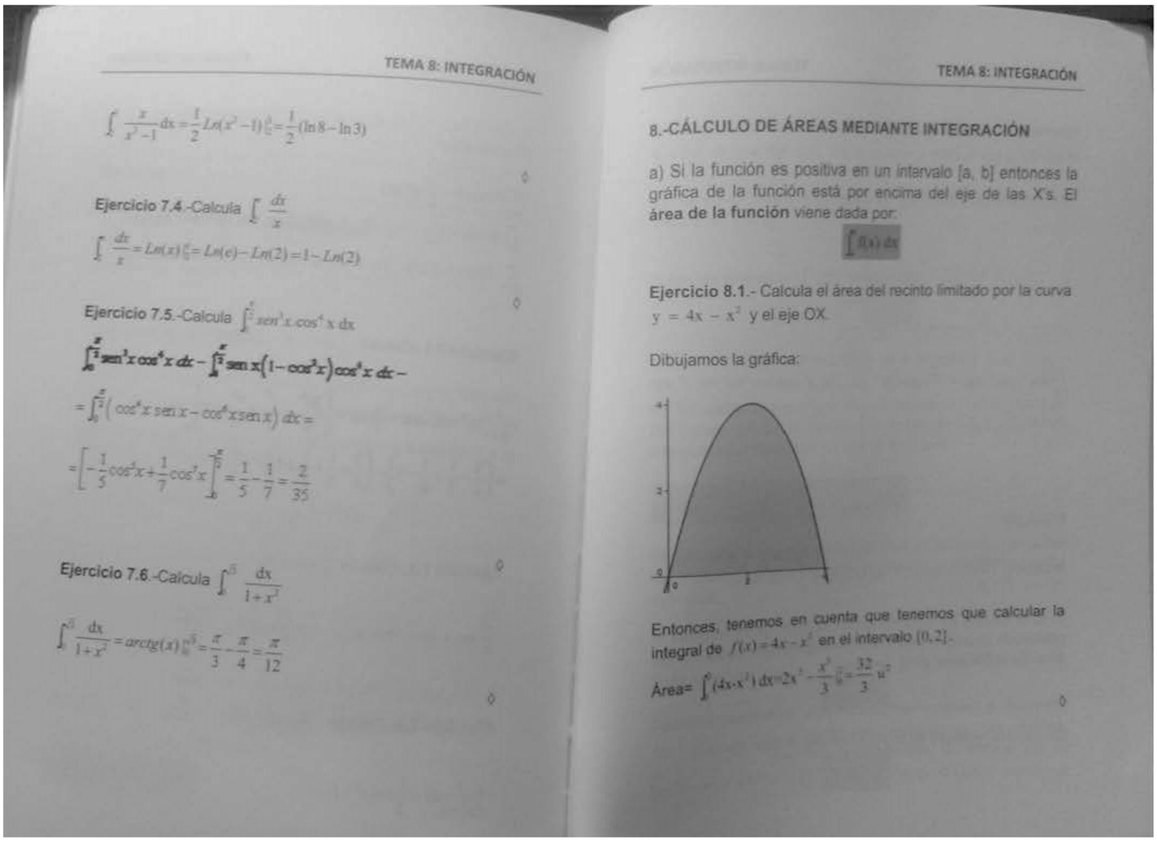
Ejercicio 7.2.-Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = -sen\ x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -sen\frac{\pi}{2} + sen 0 = -1+0=-1$$

◊

Ejercicio 7.3.-Calcula $\int \frac{x}{x^2-1}dx$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}Ln(x^2-1)+C$$



TEMA 8: INTEGRACIÓN

$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}Ln(x^2-1)\Big| = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 3)$

Ejercicio 7.4.-Calcula $\int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dx}{x} = Ln(x)\Big| = Ln(e) - Ln(2) = 1 - Ln(2)$

Ejercicio 7.5.-Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3x.\cos^4 x\, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3x\cos^4x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x(1-\cos^2x)\cos^4x\,dx -$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4x\,sen\,x - \cos^6x\,sen\,x)\,dx =$

$= \left[-\frac{1}{5}\cos^5x + \frac{1}{7}\cos^7x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$

Ejercicio 7.6.-Calcula $\int^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

$\int^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x)\Big|^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

8.-CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRACIÓN

a) Si la función es positiva en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por encima del eje de las X's. El **área de la función** viene dada por:

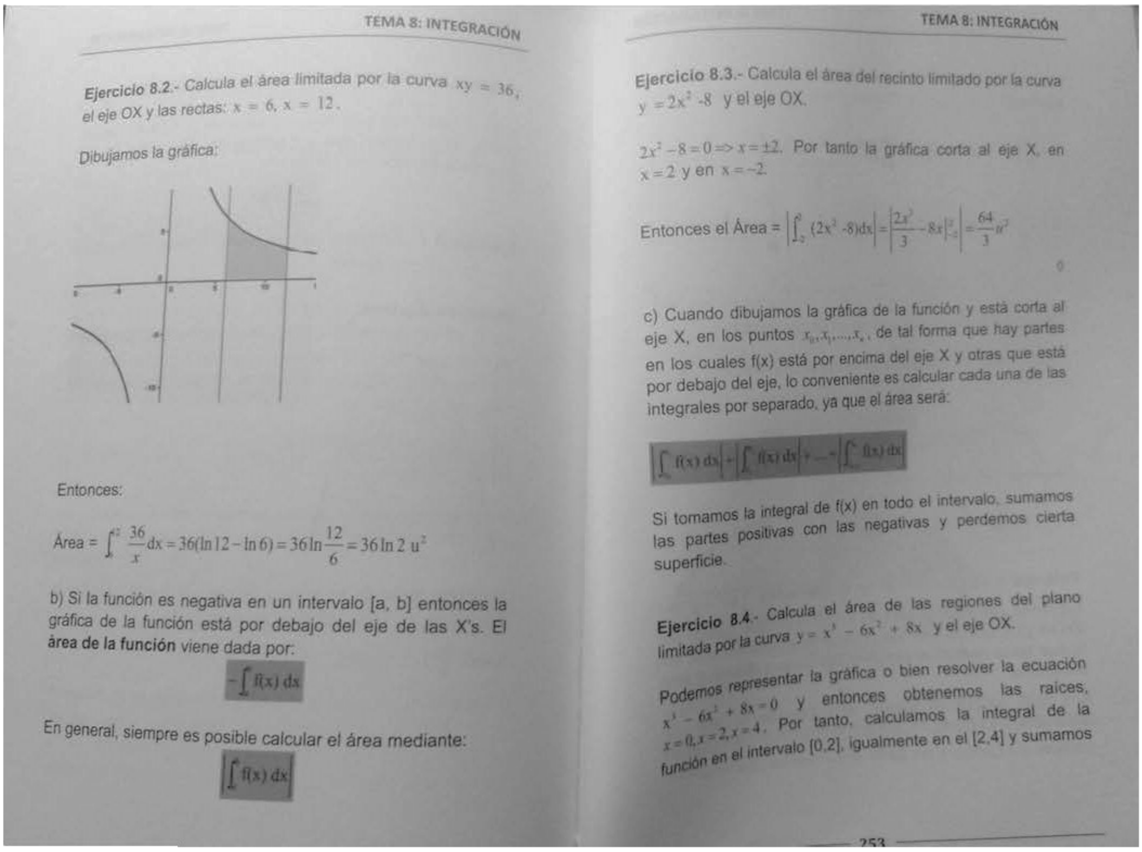
$\int f(x)\,dx$

Ejercicio 8.1.- Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

Dibujamos la gráfica:

Entonces, tenemos en cuenta que tenemos que calcular la integral de $f(x) = 4x - x^2$ en el intervalo [0,2].

Área= $\int_0^{4}(4x-x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big| = \frac{32}{3}u^2$



TEMA 8: INTEGRACIÓN

Ejercicio 8.2.- Calcula el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje OX y las rectas: $x = 6$, $x = 12$.

Dibujamos la gráfica:

Entonces:

Área = $\int_6^{12} \frac{36}{x}dx = 36(\ln 12 - \ln 6) = 36\ln\frac{12}{6} = 36\ln 2\ u^2$

b) Si la función es negativa en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de las X's. El **área de la función** viene dada por:

$-\int f(x)\,dx$

En general, siempre es posible calcular el área mediante:

$\left|\int f(x)\,dx\right|$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

Ejercicio 8.3.- Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^2 - 8$ y el eje OX.

$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Por tanto la gráfica corta al eje X, en $x = 2$ y en $x = -2$.

Entonces el Área = $\left|\int_{-2}^{2}(2x^2-8)dx\right| = \left|\frac{2x^3}{3} - 8x\Big|_{-2}^{2}\right| = \frac{64}{3}u^2$

c) Cuando dibujamos la gráfica de la función y está corta al eje X, en los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$, de tal forma que hay partes en los cuales f(x) está por encima del eje X y otras que está por debajo del eje, lo conveniente es calcular cada una de las integrales por separado, ya que el área será:

$\left|\int f(x)\,dx\right| + \left|\int f(x)\,dx\right| + ... + \left|\int f(x)\,dx\right|$

Si tomamos la integral de f(x) en todo el intervalo, sumamos las partes positivas con las negativas y perdemos cierta superficie.

Ejercicio 8.4.- Calcula el área de las regiones del plano limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

Podemos representar la gráfica o bien resolver la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ y entonces obtenemos las raíces, $x = 0, x = 2, x = 4$. Por tanto, calculamos la integral de la función en el intervalo [0,2], igualmente en el [2,4] y sumamos

253

TEMA 8: INTEGRACIÓN

sus valores absolutos que son las sumas de las áreas parciales:

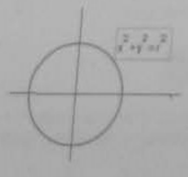
$$A=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)\,dx+\left|\int_2^4 (x^3-6x^2+8x)\,dx\right|$$

$$A=2\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)\,dx=2\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2=8u^2$$

◊

Ejercicio 8.5.-Calcula el área de un círculo de radio r.

Dibujamos la circunferencia de centro (0,0) y radio r:



Entonces $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ y si calculamos $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$, habremos calculado el área de la región positiva limitado por f(x) en [0,r], que es una cuarta parte de la circunferencia, por lo cual basta multiplicar esa área por cuatro y obtener el área del círculo.

Calculemos $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$, para lo cual tomamos el cambio de variable $x=r.sen(u)$ y por tanto $dx=r\cos(u)du$, por tanto:

TEMA 8: INTEGRACIÓN

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r\int\sqrt{r^2-r^2sen(u)}\cos(u)du=r^2\left(\frac{u}{2}+\frac{sen^2 2u}{4}\right)+C$$

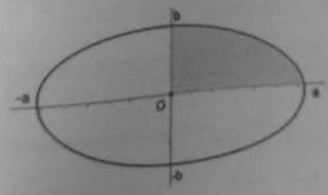
$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\left(\frac{arcsen(x/r)}{2}+\right.$$
$$\left.\frac{2\,sen(arcsen(x/r)).\cos(arcsen(x/r))}{4}\right)$$

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\left(\frac{arcsen(x/r)}{2}+\frac{(2(x/r).\sqrt{1-(x/r)^2})}{4}\right)$$

y $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi r^2}{4}$ y el área_círculo= πr^2 u^2

◊

Ejercicio 8.6.-Calcula el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Por tanto si calculamos la integral de f(x) en [0,a] y lo multiplicamos por cuatro y habremos calculado el área de la elipse.

255

TEMA 8: INTEGRACIÓN

Despejamos y: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

$$Area=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$4ab\left(\frac{arcsen(x/a)}{2}+\frac{(2(x/a)\sqrt{1-(x/a)^2})}{4}\right]_0^a=ab\pi\ u^2$$

◊

d) El área de la región limitada entre dos funciones f(x) y g(x), viene dado por la fórmula:

$$\boxed{\int_a^b (f(x)-g(x))dx}$$

Ejercicio 8.7.-Calcula el área limitada por la curva: $f(x)=x^2-5x+6$ y la recta $g(x)=2x$.

Resolvemos el sistema formado por las dos curvas y obtenemos que se cortan en los puntos $x=1$ y $x=6$, por lo que el área es:

$$Area=\left|\int_1^6 (x^2-5x+6)-(2x)dx\right|=\frac{89}{6}u^2$$

◊

Ejercicio 8.8.-Calcula el área limitada por la recta $y=x$ y la parábola $y^2=4x$.

TEMA 8: INTEGRACIÓN

Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta, de donde $x=0$ y $x=4$, por lo que el área pedido es el siguiente:

$$Area=\left|\int_0^4 (\sqrt{4x})-(x)dx\right|=\frac{8}{3}u^2$$

◊

Ejercicio 8.9.-Calcula el área limitada por las funciones $3y=x^2$ e $y=-x^2+4x$

Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta, de donde $x=0$ y $x=3$, por lo que el área pedido es el siguiente:

$$A=\int_0^3\left(-x^2+4x-\frac{x^2}{3}\right)dx=\int_0^3\left(-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx=$$

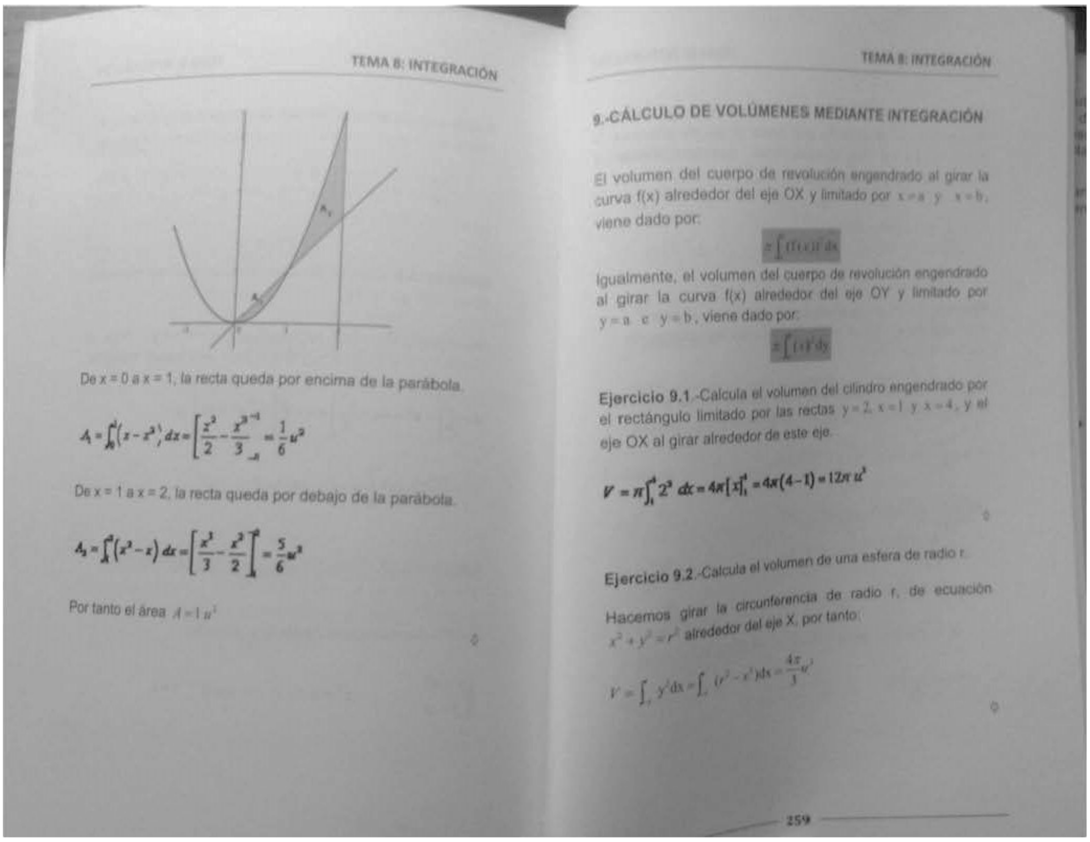
$$=\left[-\frac{4}{9}x^3+2x^2\right]_0^3=-12+18=6u^2$$

◊

Ejercicio 8.10.-Calcula el área de la figura limitada por: $y=x^2$, $y=x$, $x=0$, $x=2$

Puntos de corte de la parábola y la recta $y=x$.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \qquad x^2=x \qquad x=0 \quad x=1$$



TEMA 8: INTEGRACIÓN

De x = 0 a x = 1, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1=\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}u^2$$

De x = 1 a x = 2, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2=\int_1^2 (x^2-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{6}u^2$$

Por tanto el área $A=1\,u^2$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

9.-CÁLCULO DE VOLÚMENES MEDIANTE INTEGRACIÓN

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva f(x) alrededor del eje OX y limitado por $x=a$ y $x=b$, viene dado por:

$$\pi\int f(x)^2\,dx$$

Igualmente, el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva f(x) alrededor del eje OY y limitado por $y=a$ e $y=b$, viene dado por:

$$\pi\int f(y)^2\,dy$$

Ejercicio 9.1.-Calcula el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo limitado por las rectas $y=2$, $x=1$ y $x=4$, y el eje OX al girar alrededor de este eje.

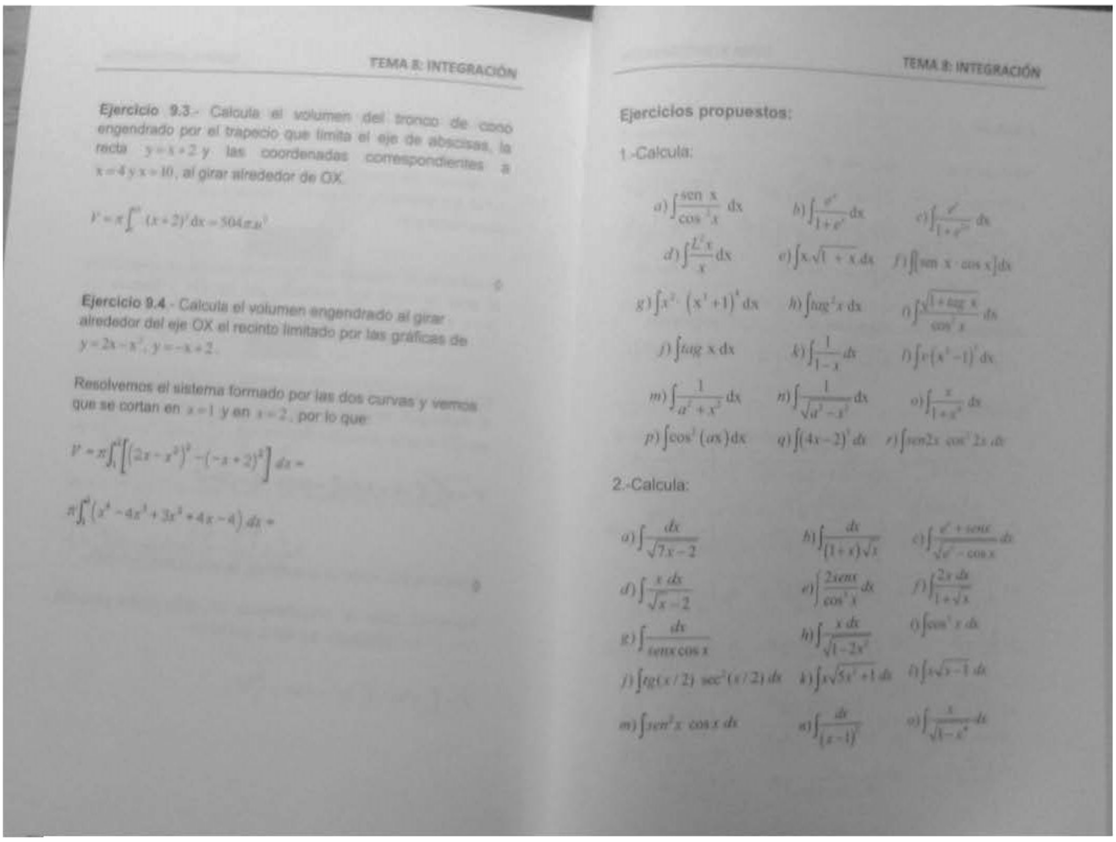
$$V=\pi\int_1^4 2^2\,dx=4\pi[x]_1^4=4\pi(4-1)=12\pi\,u^3$$

Ejercicio 9.2.-Calcula el volumen de una esfera de radio r.

Hacemos girar la circunferencia de radio r, de ecuación $x^2+y^2=r^2$ alrededor del eje X, por tanto:

$$V=\int_{-r}^{r} y^2dx=\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\frac{4\pi}{3}u^3$$

259



TEMA 8: INTEGRACIÓN

Ejercicio 9.3.- Calcula el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta $y=x+2$ y las coordenadas correspondientes a $x=4$ y $x=10$, al girar alrededor de OX.

$$V=\pi\int_4^{10}(x+2)^2dx=504\pi\,u^3$$

Ejercicio 9.4.- Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y=2x-x^2$, $y=-x+2$.

Resolvemos el sistema formado por las dos curvas y vemos que se cortan en $x=1$ y en $x=2$, por lo que:

$$V=\pi\int_1^2\left[\left(2x-x^2\right)^2-\left(-x+2\right)^2\right]dx=$$

$$\pi\int_1^2\left(x^4-4x^3+3x^2+4x-4\right)dx=$$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

Ejercicios propuestos:

1.-Calcula:

$a)\int\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}dx$ $\quad b)\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$ $\quad c)\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$d)\int\frac{L^2x}{x}dx$ $\quad e)\int x\sqrt{1+x}\,dx$ $\quad f)\int[\text{sen } x\cdot\cos x]dx$

$g)\int x^2\cdot(x^3+1)^4dx$ $\quad h)\int tag^2x\,dx$ $\quad i)\int\frac{\sqrt{1+tag\,x}}{\cos^2 x}dx$

$j)\int tag\,x\,dx$ $\quad k)\int\frac{1}{1-x}dx$ $\quad l)\int x(x^2-1)^3dx$

$m)\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$ $\quad n)\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $\quad o)\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$p)\int\cos^2(ax)dx$ $\quad q)\int(4x-2)^3dx$ $\quad r)\int sen2x\cos^2 2x\,dx$

2.-Calcula:

$a)\int\frac{dx}{\sqrt{7x-2}}$ $\quad b)\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ $\quad c)\int\frac{e^x+senx}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx$

$d)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$ $\quad e)\int\frac{2senx}{\cos^3 x}dx$ $\quad f)\int\frac{2x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

$g)\int\frac{dx}{senx\cos x}$ $\quad h)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ $\quad i)\int\cos^3 x\,dx$

$j)\int tg(x/2)\sec^2(x/2)\,dx$ $\quad k)\int x\sqrt{5x^2+1}\,dx$ $\quad l)\int x\sqrt{x-1}\,dx$

$m)\int sen^2x\cos x\,dx$ $\quad n)\int\frac{dx}{(x-1)^2}$ $\quad o)\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

3.-Calcula:

$a)\int x\cos 4x\,dx$ $\quad b)\int x\,senx\,dx$ $\quad c)\int x^2\cos x\,dx$

$d)\int x\,e^x dx$ $\quad e)\int \cos x\,\ln(senx)\,dx$ $\quad f)\int x^2\ln x\,dx$

$g)\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ $\quad h)\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx$ $\quad i)\int x\sec^2 3x\,dx$

$j)\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$ $\quad k)\int x\,senx\,\cos x\,dx$ $\quad l)\int e^x senx\,dx$

$m)\int x^2\ln(2x+1)\,dx$ $\quad n)\int arcsenx\,dx$ $\quad o)\int x^2e^x dx$

$p)\int e^{-x}\cos x\,dx$ $\quad q)\int (x^2-2x+1)\ln x\,dx$ $\quad r)\int \ln x\,dx$

4.-Calcula:

$a)\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$ $\quad b)\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}d$ $\quad c)\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx$

$d)\int \frac{x-2}{x^2+x}dx$ $\quad e)\int \frac{4x-7}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ $\quad f)\int \frac{x+18}{x^3+4x^2+9x}dx$

$g)\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$ $\quad h)\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^2-7x-6}dx$ $\quad i)\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$

$j)\int \frac{x^6}{x-1}dx$ $\quad k)\int \frac{9x+14}{x^3+2x^2-4x-8}dx$ $\quad l)\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}dx$

$m)\int \frac{x+1}{x^2+9}dx$ $\quad n)\int \frac{(x^2+2x+1)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$ $\quad o)\int \frac{2x+5}{x^2-4x+9}dx$

$p)\int \frac{dx}{1-x^4}$ $\quad q)\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ $\quad r)\int \frac{2x}{1+x^4}dx$

5.-Calcula:

$a)\int 2x(x^2+5)^{25}dx$ $\quad b)\int \frac{dx}{x^3+1}$ $\quad c)\int \frac{1}{2x^2+x+1}dx$

$d)\int tgx\,dx$ $\quad e)\int x\,\ln(1+x)\,dx$ $\quad f)\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$g)\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$ $\quad h)\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$ $\quad i)\int \frac{e^x+1}{e^x-4+4e^{-x}}dx$

$j)\int x\,arctgx\,dx$ $\quad k)\int \left(2senx-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ $\quad l)\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+4}dx$

6.-Aplica la regla de Barrow y calcula:

$a)\int (x^2+x+1)dx$ $\quad b)\int_0^{\pi} sen(x)dx$ $\quad c)\int x\ln(x)dx$

$d)\int_{-\pi}^{\pi} xsen(x)dx$ $\quad e)\int_0^{2\pi} \frac{sen(x)}{1+\cos(x)}dx$ $\quad f)\int \frac{x}{x-1}dx$

$g)\int \frac{x-3}{x}dx$ $\quad h)\int_0^{\pi} e^x sen(x)dx$

7.-Calcula:

$a)\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ $\quad b)\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ $\quad c)\int x\sqrt{x^2+9}\,dx$

$d)\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ $\quad e)\int (x+x^3)dx$ $\quad f)\int sen(x).cos(x)dx$

$g)\int (x^2+x-2)dx$ $\quad h)\int_{-1}^{1}(x^3-1)dx$ $\quad i)\int \frac{xdx}{1+x^2}$

$j)\int x^3\ln x\,dx$ $\quad k)\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$ $\quad l)\int \left(\sqrt{1+4x}\right)^2 dx$

$m)\int_0^1 (x+2x^2)dx$ $\quad n)\int \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad o)\int sen(x)dx$

$p)\int x\ln(x)dx$ $\quad q)\int \frac{x}{x-1}dx$ $\quad r)\int xsen(x)dx$

$s)\int_0^{\pi} e^x sen(x)dx$ $\quad t)\int_0^{2\pi} \frac{sen(x)}{1+\cos(x)}dx$ $\quad u)\int \frac{x-3}{x}dx$

8.-Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

9.-Calcula el área limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje OX entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.

10.-Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

11.-Halla el área limitada por la recta $y=\frac{3x-6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a $x=0$ y $x=4$.

12.-Determina *a* y *b* para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & si \quad x\le -1 \\ ax+b & si \quad -1<x<0 \\ 3x^2+2 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Con los valores calculados de *a* y *b*, halla $\int^{1} f(x)dx$

13.-Halla el área del recinto plano limitado por las curvas $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(x)=-x^2+x+2$.

14.-Representa gráficamente $f(x)=x-3+\frac{1}{x-2}$ y calcula $\int_{-1} f(x)dx$. ¿Representa esa integral definida el área limitada por la gráfica de *f(x)* y el eje OX en el intervalo [-1, 1]?

15.-Halla el área del recinto plano limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección del eje OX.

16.-Halla el área del recinto plano limitado por $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+1$ e $y-x-1=0$.

17.-Halla el área del recinto plano limitado por $f(x)=xe^{-x}$ y $g(x)=x^2e^{-x}$.

18.-Halla el área del recinto plano limitado por $f(x)=x^3-2x$ y $g(x)=x^2$.

19.-Halla el área del recinto plano limitado por $f(x)=x^2, g(x)=x^2/2$ y la recta $y=2x$.

TEMA 8: INTEGRACIÓN

20.-Halla el área del recinto plano limitado por las curvas $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=sen(2x)$ entre 0 y el primer punto de corte entre ambas funciones.

21.-Halla el área del recinto plano limitado por las curvas $f(x)=x^4-2x^2$ y $g(x)=2x^2$.

22.-Halla el área del recinto plano limitado por la parábola $y^2-2x=0$ y la recta que une los puntos $(2,-2)$ y $(4,2\sqrt{2})$.

23.-Halla el área del recinto plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2$, y $g(x)=\sqrt{x}$.

24.-Halla el área del recinto limitado por la parábola $f(x)=2x^2$, la recta $y=3-x$ y que está en el primer cuadrante.

25.-Halla el área del recinto limitado por $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, el eje de abscisas y la recta $x=2$.

26.-Halla el área del recinto limitado por $f(x)=\frac{1}{1+x}$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}$, con el eje de ordenadas.

27.-Halla el área del recinto plano determinado por la curva $f(x) = x^3 - 16x$ y el eje de abscisas.

TEMA 8: INTEGRACIÓN

28.- Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $2y^2=x-2$, el eje de abscisas y la tangente a la parábola paralela a la recta $2y=x-3$.

29.-Encuentra los volúmenes generados por las siguientes funciones al rotar sobre el eje X y los límites indicados en cada caso.

a) $y = 2x, x\in[0,3]$
b) $y = \text{sen}\, x,\ x\in[0,\pi]$
c) $y = e^x, x\in[0,4]$
d) $y = 4\,\text{sen}\, 2x, x\in[0,\frac{\pi}{4}]$
e) $x^2 + y^2 = 64, x\in[5,8]$
f) $y = x^{3/2}, x\in[1,4]$

30.-Dada la función f(x) = x sen(x), calcula:

a) $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

b) El área comprendida entre f(x) y el eje OX en el intervalo $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$.

c) Compara los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

31.-Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $2y^2=x-2$, el eje de abscisas y la tangente a la parábola paralela a la recta $2y=x-3$. Haz un dibujo del recinto descrito.

TEMA 8: INTEGRACIÓN

32.-Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la curva $y=\frac{x^2}{2}+1$ al girar alrededor del eje X entre las rectas x = -1 y x = 2.

33.-Calcula el volumen engendrado por la parábola $y^2 = x$ al girar alrededor del eje X entre 0 y 4.

34.-Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y=e^{-x}$ y la recta $x=3$, al girar alrededor del eje X.

35.-La región limitada por la recta $y=x-3$, la parábola $y=(x-5)^2$ y el eje X, gira alrededor de este eje. Halla el volumen del cuerpo de revolución que genera.

36.-Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje X el recinto limitado por las funciones $y=\frac{1}{x}$, $x=y^2$ y $x=4$.

37.-a) Se sabe que $\int_a^b f(x)dx=0$. ¿Se puede asegurar que a = b? Razona la respuesta.

b) Calcula, utilizando la Regla de Barrow, la integral definida $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

TEMA 8: INTEGRACIÓN

38.- a) Sea f(x) una función continua positiva tal que $1\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 2$. ¿Se puede asegurar que f(x)≥ 1, para todo x ∈ [0, 1]? Razona la respuesta.

b) Calcular la integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos(x)dx$

39.- Teniendo en cuenta que la función toma valores positivos y negativos. Halla el valor de **a** de forma que el área limitada por el eje OX, la recta $x=-1$, la recta $x=2$ y la curva $f(x)=2x^3-3x^2+a$ quede dividida por el eje OX en dos partes con igual área.

40.-Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes curvas: x·y = 1, y = x^2, x = 3. Haz un dibujo del recinto descrito.

41.-Sea $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$, y sean a, b ∈ R^+. Demuestra que f(a·b) = f(a) + f(b).

42.-Sabiendo que P(x) es un polinomio de tercer grado con un punto de inflexión en (1, 0) y con P'''(1) = 24 donde, además, la tangente al polinomio en ese punto es horizontal. Calcula $\int_0^1 P(x)dx$.

43.-Calcula:

a) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

b) $\int\frac{2-x}{5+4x-x^2}dx$

c) $\int(x\ln x)^2dx$

d) $\int \frac{5x-6}{2\sqrt{x}}dx$ e) $\int x.arctgx dx$ f) $\int x^2 sen(2x)dx$

g) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ h) $\int \frac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx$ i) $\int \frac{1}{e^x-1}dx$

j) $\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$ k) $\int \sqrt{4-x^2}dx$ l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx$

ll) $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$ m) $\int_0 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$ n) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

44.-Calcula el área del recinto limitado por las funciones:

$$y=x+1,\ y=x^3+2x^2-1$$

45.-Calcula el volumen del cuerpo engendrado al girar la figura limitada por la curva $y^2=x^3$, la recta x=1 y la recta y=0.

46.-Calcula el área del recinto limitado por la curva $x=y^2$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (1,1).

47.- Halla el área comprendida entre las curvas:

$$y=x^3-x,\ y=2x^2-2$$

48.-Calcula el área limitada por las funciones:

$$y=x^2-2x,\ y=-x^2+4x$$

49.- Halla el área encerrada por la curva $x=y^2+2$ y la recta perpendicular a la recta y+x=2 que pasa por el punto (2,-2).

50.- Halla $\int_2^4 |x-3|dx$

51.- Halla dos puntos de corte de las funciones $f(x)=sen\ x$ y g(x)=cos x. Representar y Halla el área del recinto encerrado por ambas funciones entre los dos puntos de corte.

52.-Halla $\int_1^3 \ln\left((x^2+1)^y\right)dx$

53.- Representa gráficamente la función f(x) = |-2x-1| y Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

54.-Halla una primitiva de $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$ que se anule en x=4.

55.- Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x-1}{x}dx$ b) $\int x^4.\ln x dx$

c) $\int \frac{1}{1+x}dx$ d) $\int \frac{x+1}{x^2-x}dx$

56.-Halla una función f(x) que cumpla: f''(x)=2x, y tiene un máximo en (3,0).

57.-Halla la primitiva de f(x)=x.(1-lnx) que pase por el punto (1,1).

58.-Halla una primitiva de [illegible] que se anule en x=0.

59.-Halla una función f(x) sabiendo que f '(x)= (x-1).e^x y f(x) tiene un extremo en el eje OX.

60.-Halla una función f(x) sabiendo que:

f ''(x)=x.lnx, f '(1)=0, f(e) = $\frac{e}{4}$

61.-Halla una función f(x) sabiendo que:

f '''(x)=24x, f ''(0)=2, f '(0)=1, f(0)=0.

B. Solucionario actividades tema 8. Integración

SOLUCIONES DEL LIBRO:
MATEMÁTICAS II
TEMA 8

1.-Calcula:

$a) \int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}x dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{\text{sen}x}$. Por tanto:

$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\text{sen } x}{u^2} \frac{-du}{\text{sen } x} = -\int \frac{du}{u^2} = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C$

$b) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 + e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$. Por tanto:

$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{u} \frac{du}{e^x} = \int \frac{du}{u} = Ln(u) + C = Ln(1+e^x) + C$

$c) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$. Por tanto:

$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+u^2} \frac{du}{e^x} = \int \frac{du}{1+u^2} = arctg(u) + C = arctg(e^x) + C$

$d) \int \frac{L^2 x}{x} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = Ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x du$. Por tanto:

$\int \frac{L^2 x}{x} dx = \int \frac{u^2 x du}{x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(Ln(x))^3}{3} + C$

$e) \int x.\sqrt{1+x}.dx$

Hacemos el cambio de variable $u^2 = 1 + x \Rightarrow 2u du = dx$ y $x = u^2 - 1$. Por tanto:

$\int x.\sqrt{1+x}.dx = \int (u^2-1)\sqrt{u^2} 2u du = \int (2u^4 - 2u^2) du = \frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + C =$

$= \frac{2\left(\sqrt{1+x}\right)^5}{5} - \frac{2\left(\sqrt{1+x}\right)^3}{3} + C$

$f) \int [\text{sen } x \cdot \cos x] dx = \int \frac{2[\text{sen } x \cdot \cos x]}{2} dx = \int \frac{sen(2x)}{2} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$. Por tanto:

$\int \frac{sen(2x)}{2} dx = \int \frac{sen(2u)}{2} \frac{du}{2} = \int \frac{sen(2u)}{4} du = \frac{-\cos(u)}{4} + C = \frac{-\cos(2x)}{4} + C$

$g) \int x^2 \cdot \left(x^3+1\right)^4 dx$

Hacemos el cambio de variable $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$. Por tanto:

$\int x^2 \cdot \left(x^3+1\right)^4 dx = \int x^2 \cdot u^4 \frac{du}{3x^2} = \int \frac{u^4}{3} du = \frac{u^5}{15} + C = \frac{\left(x^3+1\right)^5}{15} + C$

$h) \int tag^2 x \, dx = \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + C$

$i) \int \frac{\sqrt{1+tg\, x}}{\cos^2 x} dx$

Hacemos el cambio de variable

$u = 1 + tgx \Rightarrow du = \sec^2 x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x du$.

Por tanto:

$\int \frac{\sqrt{1+tg\, x}}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sqrt{u}\cos^2 x}{\cos^2 x} du = \int \sqrt{u} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + C = \frac{2\sqrt{(1+tgx)^3}}{3} + C$

$j) \int tag\, x \, dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos x \Rightarrow du = -senx dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{senx}$. Por tanto:

$\int \frac{senx}{\cos x} dx = \int \frac{senx}{u} \frac{-du}{senx} = \int \frac{-du}{u} = -Ln(u) + C = -Ln(\cos x) + C$

$k) \int \frac{1}{1-x} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$. Por tanto:

$\int \frac{1}{1-x} dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -Ln(u) + C = -Ln(1-x) + C$

$l) \int x \cdot \left(x^2-1\right)^5 dx$

Hacemos el cambio de variable $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Por tanto:

$\int x \cdot \left(x^2-1\right)^5 dx = \int x u^5 \frac{du}{2x} = \frac{u^6}{12} + C = \frac{\left(x^2-1\right)^6}{12} + C$

$m) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = \frac{x}{a} \Rightarrow du = \frac{1}{a} dx \Rightarrow dx = a du$. Por tanto:

$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{a du}{a^2 + a^2 u^2} = \int \frac{du}{a(1+u^2)} = \frac{1}{a} arctg(u) + C = \frac{1}{a} arctg(\frac{x}{a}) + C$

$n) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

Hacemos el cambio de variable $x = asen(u) \Rightarrow u = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$ y $dx = a\cos(u) du$.

Por tanto:

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a \cos u \, du}{a\sqrt{1-sen^2 u}} = \int \frac{\cos u}{\sqrt{\cos^2 u}} du = \int du = u + C = arcsen\frac{x}{a} + C$

$o) \int \frac{x}{1+x^4} dx$

Hacemos el cambio de variable $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Por tanto:

$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \int \frac{x}{1+u^2} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} arctg(u) + C = \frac{1}{2} arctg(x^2) + C$

$p) \int \cos^2(ax) dx$

$\cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x)$

$\underline{\cos^2 x + sen^2 x = 1}$

$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\int \cos^2(ax) dx = \int \frac{1+\cos(2ax)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{sen(2ax)}{4} + C$

$q) \int (4x-2)^5 dx$

Hacemos el cambio de variable $u = 4x - 2 \Rightarrow du = 4dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$. Por tanto:

$\int (4x-2)^5 dx = \int u^5 \frac{du}{4} = \frac{u^6}{24} + C = \frac{(4x-2)^6}{24} + C$

$r) \int sen2x \cos^2 2x \, dx$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos(2x) \Rightarrow du = -2sen(2x)dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{2sen(2x)}$.

Por tanto:

$$\int sen2x\cos^2 2x\,dx = \int sen(2x).u^2.\frac{-du}{2sen(2x)} = \frac{-1}{2}\int u^2du = \frac{-u^3}{6}+C = \frac{-\cos^3(2x)}{6}+C$$

2.-Calcula:

$a)\int \frac{dx}{\sqrt{7x-2}}$

Hacemos el cambio de variable $u = 7x-2 \Rightarrow du = 7dx \Rightarrow dx = \frac{du}{7}$. Por tanto:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x-2}} = \int \frac{du}{7\sqrt{u}} = \frac{1}{7}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{7}\frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{2}{7}\sqrt{u}+C = \frac{2}{7}\sqrt{7x-2}+C$$

$b)\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ ó $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$. Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{(1+u^2)u} = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2arctg(u)+C = 2arctg(\sqrt{x})+C$$

$c)\int \frac{e^x+senx}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx$

Hacemos el cambio de variable $u = e^x-\cos x \Rightarrow du = (e^x+senx)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x+senx}$.

Por tanto:

$$\int \frac{e^x+senx}{\sqrt{e^x-\cos x}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = \frac{u^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{e^x-\cos x}+C$$

$d)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}-2}$

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ ó $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$. Por tanto:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}-2} = \int \frac{2u^3du}{u-2}$$

En este caso dividimos la fracción algebraica:

$$Cociente(\frac{2u^3}{u-2}) = 2u^2+4u+8;\ Resto(\frac{2u^3}{u-2}) = 16 \Rightarrow 2u^3 = (u-2)(2u^2+4u+8)+16$$

$$\int \frac{2u^3du}{u-2} = \int \frac{(u-2)(2u^2+4u+8)+16}{u-2}du = \int (2u^2+4u+8)du + \int \frac{16du}{u-2} =$$

$$= \frac{2u^3}{3}+2u^2+8u+16Ln(u-2)+C = \frac{2\sqrt{x}^3}{3}+2\sqrt{x}^2+8\sqrt{x}+16Ln(\sqrt{x}-2)+C$$

$e)\int \frac{2senx}{\cos^5 x}dx$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos x \Rightarrow du = -senxdx \Rightarrow dx = \frac{-du}{senx}$. Por tanto:

$$\int \frac{2senx}{\cos^5 x}dx = \int \frac{-2du}{u^5} = -2\int u^{-5}du = \frac{u^{-4}}{2}+C = \frac{1}{2u^4}+C = \frac{1}{2\cos^4 x}+C$$

$f)\int \frac{2x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ ó $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$. Por tanto:

$$\int \frac{2x\,dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{4u^3du}{u+1}$$

En este caso dividimos la fracción algebraica:

$$Cociente(\frac{u^3}{u+1}) = u^2-u+1;\ Resto(\frac{u^3}{u+1}) = -1 \Rightarrow 4u^3 = 4(u+1)(u^2-u+1)-1$$

$$\int \frac{4u^3du}{u+1} = \int \frac{4(u+1)(u^2-u+1)-1}{u+1}du = 4\int (u^2-u+1)du - \int \frac{4du}{u+1} =$$

$$= \frac{4u^3}{3}-2u^2+4u-4Ln(u+1)+C = \frac{4\sqrt{x}^3}{3}-2x+4\sqrt{x}-4Ln(\sqrt{x}+1)+C$$

$g)\int \frac{dx}{senx\cos x}$, como $sen(2x) = 2senx\cos x \Rightarrow = \frac{sen(2x)}{2} \Rightarrow \frac{1}{senx\cos x} = \frac{2}{sen(2x)}$

Entonces

$$\int \frac{dx}{senx\cos x} = \int \frac{2dx}{sen(2x)} = 2\int \frac{sen^2(2x)+\cos^2(2x)}{sen(2x)}dx = 2\int \frac{sen^{\cancel{2}}(2x)}{\cancel{sen(2x)}}dx + 2\int \frac{\cos^2(2x)}{sen(2x)}dx =$$

$$2\int senxdx + 2\int \frac{\cos^2(2x)}{sen(2x)} = -2\cos x + 2\int \frac{\cos^2(2x)}{sen(2x)}$$

Ahora basta con calcular $\int \frac{\cos^2(2x)}{sen(2x)}$ y resolvemos el ejercicio:

$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2x$ y $1 = \cos^2 x + sen^2 x$, sumamos y obtenemos que:

$\cos(2x)+1 = 2\cos^2 x$

$h)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

Hacemos el cambio de variable $u = 1-2x^2 \Rightarrow du = -4xdx \Rightarrow dx = \frac{-du}{4x}$. Por tanto:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \int \frac{-du}{4\sqrt{u}} = \frac{-1}{4}\int u^{-1/2}du = \frac{-\sqrt{u}}{2}+C = \frac{-\sqrt{1-2x^2}}{2}+C$$

$$i)\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^2 x\cos^2 x\cos\ xdx = \int (1-sen^2x)^2\cos xdx =$$

$$\int (1-2sen^2x+sen^4x)\cos xdx = \int \cos xdx - 2\int sen^2x\cos xdx + \int sen^4x\cos xdx =$$

$$= senx - \frac{2sen^3x}{3}+\frac{sen^5x}{5}+C$$

$j)\int tg(x/2)\ \sec^2(x/2)\ dx$

Hacemos el cambio de variable $u = tg(\frac{x}{2}) \Rightarrow du = \sec^2(\frac{x}{2}).\frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2(\frac{x}{2})}$.

Por tanto:

$$\int tg(x/2)\ \sec^2(x/2)\ dx = \int 2udu = u^2+C = tg^2(x/2)+C$$

$$k)\int x\sqrt{5x^2+1}\ dx = \frac{1}{10}\int 10x\sqrt{5x^2+1} = \frac{(5x^2+1)^{3/2}}{10.(3/2)}+C = \frac{(5x^2+1)^{3/2}}{15}+C$$

$l)\int x\sqrt{x-1}\ dx$

Hacemos el cambio de variable $u^2 = x-1 \Rightarrow 2udu = dx$. Por tanto:

$$\int x\sqrt{x-1}\ dx = \int (u^2+1)u.2udu = 2\int (u^4+u^2)du = \frac{2u^5}{5}+\frac{2u^3}{3}+C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}^5}{5}+\frac{2\sqrt{x-1}^3}{3}+C$$

$$m)\int sen^2x\ \cos x\ dx = \frac{sen^3x}{3}+C$$

$$n)\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C = \frac{-1}{x-1}+C$$

$o)\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Hacemos el cambio de variable $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Por tanto:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}arcsen(u)+C = \frac{1}{2}arcsen(x^2)+C$$

3.-Calcula:

Recordemos las fórmulas de la integración por partes para no reescribirlas continuamente:

$\int u.v' = uv - \int u'.v$

$\int u.v'' = u.v' - u'.v + \int v.u''$

$\int u.v''' = u.v'' - u'.v' + u''.v - \int v.u'''$

La regla nemotécnica ALPES indica que debemos tomar como u siguiendo el orden de izquierda a derecha: Arcos, Logaritmos, Polinomios, Exponenciales y Senos y cosenos.

$a)\int x\cos 4x\ dx$

u=x +	u'=1
v'=cos(4x)	$v = \frac{sen(4x)}{4}$

-

$$\int x\cos 4x\ dx = x.sen(4x) - \int \frac{sen(4x)}{4}dx = x.sen(4x) - \frac{\cos(4x)}{16}+C$$

$b)\int x\ senx\ dx$

u=x +	u'=1
v'=sen(x)	v = −cos(x)

-

$$\int x.senx\ dx = -x.\cos(x) + \int \cos xdx = -x.\cos(x) + senx + C$$

$c)\int x^2\cos xdx$

$u = x^2$	+ $u' = 2x$	- $u'' = 2$
$v'' = \cos(x)$	$v' = sen(x)$	$v = -\cos(x)$

+

$$\int x^2\cos xdx = x^2.sen(x) + 2x\cos x - 2\int \cos xdx = x^2.sen(x) + 2x\cos x - 2senx + C$$

$d)\int x\,e^x dx$

u=x	u'=1
$v'=e^x$	$v=e^x$

$\int x\,e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$e)\int \cos x\,\ln(senx)\,dx$

u=Ln(sen(x))	$u'=\frac{\cos(x)}{sen(x)}$
$v'=\cos(x)$	$v=sen(x)$

$\int \cos x\,\ln(senx)\,dx = sen(x).\ln(sen(x)) - \int \cos x dx = sen(x).\ln(sen(x)) - sen(x) + C$

$f)\int x^2 \ln x\,dx$

u=Ln(x)	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=x^2$	$v=\frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

$g)\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

u=Ln(x)	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=\frac{1}{x^2}$	$v=\frac{-1}{x}$

$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

$i)\int x\sec^2 3x\,dx$

u = x	$u'=1$
$v'=\sec^2(3x)$	$v=\frac{tg(3x)}{3}$

$\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{xtg(3x)}{3} - \int \frac{tg(3x)}{3} dx = \frac{xtg(3x)}{3} + \frac{\ln(\cos(3x))}{9} + C$

$k)\int x\,senx\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int 2x senx \cos x dx = \frac{1}{2}\int xsen(2x)dx$

u = x	$u'=1$
$v'=sen(2x)$	$v=\frac{-\cos(2x)}{2}$

$\frac{1}{2}\int xsen(2x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-x\cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)dx}{4}\right) = \frac{-x\cos(2x)}{4} + \frac{sen(2x)}{8} + C$

$l)\int e^x senx\,dx$

$u=e^x$	$u'=e^x$	$u''=e^x$
$v''=sen(x)$	$v'=-\cos(x)$	$v=-sen(x)$

$\int e^x senx\,dx = -e^x \cos x + e^x senx - \int e^x senx\,dx \Rightarrow 2\int e^x senx\,dx = -e^x \cos x + e^x senx$

$\int e^x senx\,dx = \frac{-e^x \cos x + e^x senx}{2} + C$

$n)\int arcsenx\,dx$

u = arcsen(x)	$u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$v'=1$	$v=x$

$\int arcsenx\,dx = x.arcsen(x) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x.arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

$o)\int x^2 e^x dx$

$u=x^2$	$u'=2x$	$u''=2$
$v''=e^x$	$v'=e^x$	$v=e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2.e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$p)\int e^x \cos x\,dx$

$u=e^x$	$u'=e^x$	$u''=e^x$
$v''=\cos(x)$	$v'=sen(x)$	$v=-\cos(x)$

$\int e^x \cos x\,dx = e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx \Rightarrow 2\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x senx$

$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \cos x + e^x senx}{2} + C$

$q)\int (x^2-2x+1)\ln x\,dx$

u = Ln(x)	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=x^2-2x+1$	$v=\frac{x^3}{3}-x^2+x$

$\int (x^2-2x+1)\ln x\,dx = \ln(x)\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right) - \int\left(\frac{x^2}{3}-x+1\right)dx =$

$=\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C$

$r)\int \ln x\,dx$

u = Ln(x)	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=1$	$v=x$

$\int \ln x\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$

4.-Calcula:

$a)\ \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$

Resolvemos la ecuación $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=2, x=1$. Expresamos la fracción algebraica como:

$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 2x+1 = A(x-1)+B(x-2)$

Entonces para $x=2 \Rightarrow 5=A$ y para $x=1 \Rightarrow 3=-B \Rightarrow B=-3$. A continuación, la integral se convierte en:

$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x-1} = 5\ln(x-2) - 3\ln(x-1) + C = \ln\left(\frac{(x-2)^5}{(x-1)^3}\right) + C$

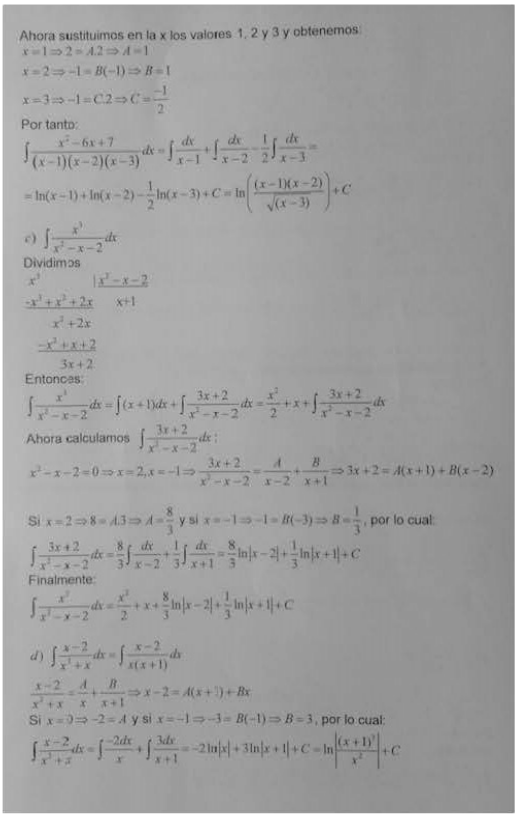
$b)\ \int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=1, x=2, x=3$

Preparamos la fracción algebraica:

$\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-6x+7 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$



Ahora sustituimos en la x los valores 1, 2 y 3 y obtenemos:

$x=1 \Rightarrow 2=A.2 \Rightarrow A=1$

$x=2 \Rightarrow -1=B(-1) \Rightarrow B=1$

$x=3 \Rightarrow -1=C.2 \Rightarrow C=\frac{-1}{2}$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \ln(x-1) + \ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x-3) + C = \ln\left(\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{(x-3)}}\right) + C$$

c) $\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx$

Dividimos

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-x-2 \\ \hline -x^3+x^2+2x & x+1 \\ \quad x^2+2x & \\ \quad -x^2+x+2 & \\ \quad 3x+2 & \end{array}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{3x+2}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{3x+2}{x^2-x-2}dx$$

Ahora calculamos $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2}dx$:

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2, x=-1 \Rightarrow \frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 3x+2 = A(x+1)+B(x-2)$$

Si $x=2 \Rightarrow 8=A3 \Rightarrow A=\frac{8}{3}$ y si $x=-1 \Rightarrow -1=B(-3) \Rightarrow B=\frac{1}{3}$, por lo cual:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-x-2}dx = \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

Finalmente:

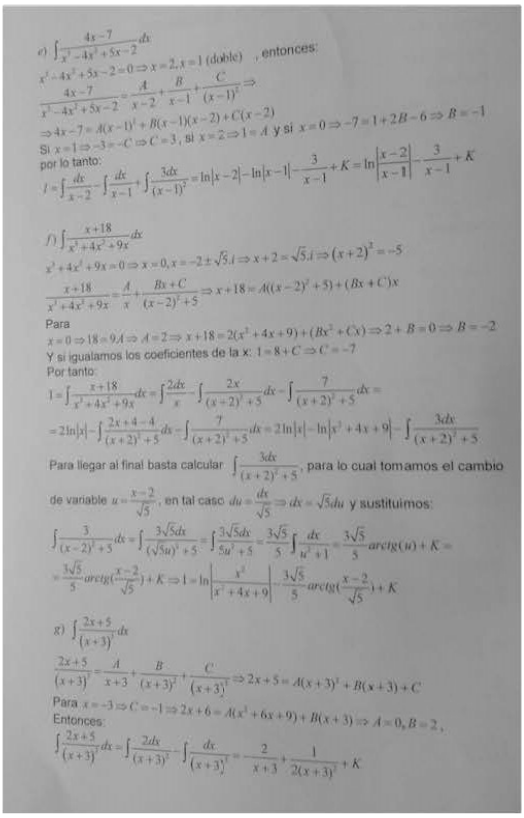
$$\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

d) $\int \frac{x-2}{x^2+x}dx = \int \frac{x-2}{x(x+1)}dx$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow x-2 = A(x+1)+Bx$$

Si $x=0 \Rightarrow -2=A$ y si $x=-1 \Rightarrow -3=B(-1) \Rightarrow B=3$, por lo cual:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}dx = \int \frac{-2dx}{x} + \int \frac{3dx}{x+1} = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^2}\right| + C$$



e) $\int \frac{4x-7}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

$x^3-4x^2+5x-2=0 \Rightarrow x=2, x=1$ (doble) , entonces:

$$\frac{4x-7}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x-7 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2)$

Si $x=1 \Rightarrow -3=-C \Rightarrow C=3$, si $x=2 \Rightarrow 1=A$ y si $x=0 \Rightarrow -7=1+2B-6 \Rightarrow B=-1$

por lo tanto:

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} = \ln|x-2| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + K = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + K$$

f) $\int \frac{x+18}{x^3+4x^2+9x}dx$

$x^3+4x^2+9x=0 \Rightarrow x=0, x=-2\pm\sqrt{5}.i \Rightarrow x+2=\sqrt{5}.i \Rightarrow (x+2)^2=-5$

$$\frac{x+18}{x^3+4x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x-2)^2+5} \Rightarrow x+18 = A((x-2)^2+5)+(Bx+C)x$$

Para

$x=0 \Rightarrow 18=9A \Rightarrow A=2 \Rightarrow x+18=2(x^2+4x+9)+(Bx^2+Cx) \Rightarrow 2+B=0 \Rightarrow B=-2$

Y si igualamos los coeficientes de la x: $1=8+C \Rightarrow C=-7$

Por tanto:

$$I = \int \frac{x+18}{x^3+4x^2+9x}dx = \int \frac{2dx}{x} - \int \frac{2x}{(x+2)^2+5}dx - \int \frac{7}{(x+2)^2+5}dx =$$

$$= 2\ln|x| - \int \frac{2x+4-4}{(x+2)^2+5}dx - \int \frac{7}{(x+2)^2+5}dx = 2\ln|x| - \ln|x^2+4x+9| - \int \frac{3dx}{(x+2)^2+5}$$

Para llegar al final basta calcular $\int \frac{3dx}{(x+2)^2+5}$, para lo cual tomamos el cambio de variable $u=\frac{x-2}{\sqrt{5}}$, en tal caso $du=\frac{dx}{\sqrt{5}} \Rightarrow dx=\sqrt{5}du$ y sustituimos:

$$\int \frac{3}{(x-2)^2+5}dx = \int \frac{3\sqrt{5}dx}{(\sqrt{5}u)^2+5} = \int \frac{3\sqrt{5}dx}{5u^2+5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\int \frac{dx}{u^2+1} = \frac{3\sqrt{5}}{5}arctg(u) + K =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{5}arctg(\frac{x-2}{\sqrt{5}}) + K \Rightarrow I = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+4x+9}\right| - \frac{3\sqrt{5}}{5}arctg(\frac{x-2}{\sqrt{5}}) + K$$

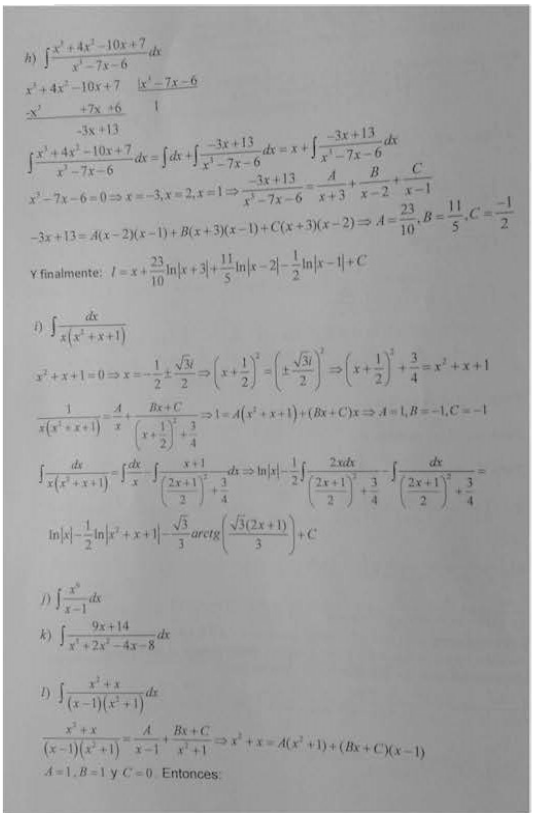
g) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} \Rightarrow 2x+5 = A(x+3)^2 + B(x+3) + C$$

Para $x=-3 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow 2x+6 = A(x^2+6x+9)+B(x+3) \Rightarrow A=0, B=2$,

Entonces:

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx = \int \frac{2dx}{(x+3)^2} - \int \frac{dx}{(x+3)^3} = -\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2(x+3)^2} + K$$



h) $\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}dx$

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2-10x+7 & x^3-7x-6 \\ \hline -x^3 \quad +7x \; +6 & 1 \\ \quad -3x+13 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}dx = \int dx + \int \frac{-3x+13}{x^3-7x-6}dx = x + \int \frac{-3x+13}{x^3-7x-6}dx$$

$$x^3-7x-6=0 \Rightarrow x=-3, x=2, x=1 \Rightarrow \frac{-3x+13}{x^3-7x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1}$$

$$-3x+13 = A(x-2)(x-1)+B(x+3)(x-1)+C(x+3)(x-2) \Rightarrow A=\frac{23}{10}, B=\frac{11}{5}, C=\frac{-1}{2}$$

Y finalmente: $I = x + \frac{23}{10}\ln|x+3| + \frac{11}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$

i) $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2+x+1$$

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow 1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)x \Rightarrow A=1, B=-1, C=-1$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \Rightarrow \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right) + C$$

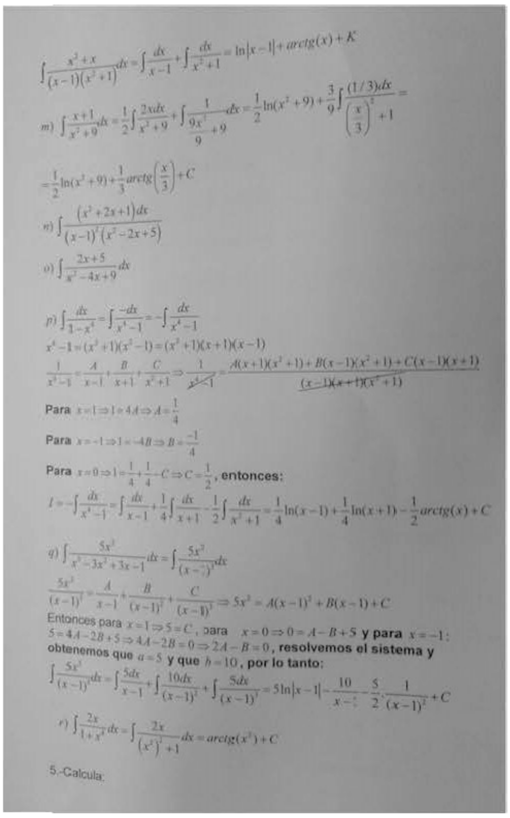
j) $\int \frac{x^6}{x-1}dx$

k) $\int \frac{9x+14}{x^3+2x^2-4x-8}dx$

l) $\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}dx$

$$\frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x^2+x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$A=1$, $B=1$ y $C=0$. Entonces:



$$\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln|x-1| + arctg(x) + K$$

m) $\int \frac{x+1}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+9} + \int \frac{1}{\frac{9x^2}{9}+9}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{3}{9}\int \frac{(1/3)dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} =$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

n) $\int \frac{(x^2+2x+1)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$

o) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+9}dx$

p) $\int \frac{dx}{1-x^4} = \int \frac{-dx}{x^4-1} = -\int \frac{dx}{x^4-1}$

$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{x^4-1}} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+C(x-1)(x+1)}{\cancel{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}$$

Para $x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

Para $x=-1 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=\frac{-1}{4}$

Para $x=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$, **entonces:**

$$I = -\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}arctg(x) + C$$

q) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}dx$

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \Rightarrow 5x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Entonces para $x=1 \Rightarrow 5=C$, para $x=0 \Rightarrow 0=A-B+5$ **y para** $x=-1$: $5=4A-2B+5 \Rightarrow 4A-2B=0 \Rightarrow 2A-B=0$, **resolvemos el sistema y obtenemos que** $a=5$ **y que** $b=10$, **por lo tanto:**

$$\int \frac{5x^2}{(x-1)^3}dx = \int \frac{5dx}{x-1} + \int \frac{10dx}{(x-1)^2} + \int \frac{5dx}{(x-1)^3} = 5\ln|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C$$

r) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{2x}{(x^2)^2+1}dx = arctg(x^2) + C$

5.-Calcula:

$a)\int 2x\left(x^2+5\right)^{25}dx$, como la derivada de x^2+5 es $2x$, entonces nos encontramos ante una integral de una potencia compuesta, por lo que: $\int 2x\left(x^2+5\right)^{25}dx=\frac{\left(x^2+5\right)^{26}}{26}+C$, ya que $\int u^n \cdot u' dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$. Puedes igualmente calcularlo mediante cambio de variable tomando $u=x^2+5$.

$b)\int \frac{dx}{x^3+1}$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\Rightarrow 1=A\left(x^2-x+1\right)+\left(Bx+C\right)(x-1)$

Si $x=-1\Rightarrow A=\frac{1}{3}$, si $x=0\Rightarrow C=\frac{2}{3}$ y si $x=1\Rightarrow B=\frac{-1}{3}$, por tanto:

$\int\frac{1}{x^3+1}dx=\overbrace{\int\frac{1/3}{x+1}dx}^{I_1}+\overbrace{\int\frac{(-1/3)x+2/3}{x^2-x+1}dx}^{I_2}=$

$I_1=\int\frac{1/3}{x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|$

$I_2=\int\frac{(-1/3)x+2/3}{x^2-x+1}dx=\frac{-1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{-1}{3}\frac{1}{2}\int\frac{2\cdot(x-2)}{x^2-x+1}dx=\frac{-1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=$

$\frac{-1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx=\underbrace{\frac{-1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx}_{\text{Tipo logarítmico}}-\underbrace{\frac{1}{6}\int\frac{-3}{x^2-x+1}dx}_{\text{Tipo arco tangente}}$

Tipo logarítmico $\Rightarrow\ \frac{-1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{-1}{6}\ln|x^2-x+1|$

Tipo arco tangente $\Rightarrow -\frac{1}{6}\int\frac{-3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot 4\int\frac{1}{4x^2-4x+4}dx=$

$2\int\frac{1}{(2x-1)^2+3}dx=2\int\frac{1/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{2}{3}\ \frac{3}{2\sqrt{3}}\int\frac{2\sqrt{3}/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$I_2=$ tipo logarítmico + tipo arco tangente $=\frac{-1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$I=I_1+I_2\ \Rightarrow \int\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$c)\int\frac{1}{2x^2+x+1}dx$

$d)\int tgx\,dx=\int\frac{sen(x)}{\cos(x)}dx=\ln|\cos(x)|+C$, ya que $\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+C$

$e)\int x\ \ln(1+x)\ dx$

$u=\ln(x+1)$	$u'=\frac{1}{x+1}$
$v'=x$	$v=\frac{x^2}{2}$

$\int x\ \ln(1+x)\ dx=\frac{x^2\ln|x+1|}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x+1}$

```
x²        |x+1
-x² -x     x-1
    -x
     x+1
      1
```

$\int\frac{x^2dx}{x+1}=\int(x-1)dx+\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

Por tanto:

$I=\frac{x^2\ln|x+1|}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+C$ $\ f)\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$g)\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

$h)\int\left(x^2-2x+3\right)\ln x\ dx$, por partes:

$I=\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)-\int\left(\frac{x^2}{3}-x\ +3\right)dx=\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C$

$i)\int\frac{e^x+1}{e^x-4+4e^{-x}}dx$

$j)\int x\ arctgx\ dx$

$u=\operatorname{arctg}(x)$	$u'=\frac{1}{x^2+1}$
$v'=x$	$v=\frac{x^2}{2}$

$I=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$

$\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctg(x)+C$

$k)\int\left(2senx-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=2\cos(x)-tg(x)+C$

$l)\int\frac{x^3+1}{x^2-5x+4}dx$

6.-Aplica la regla de Barrow y calcula:

$a)\int_1^2\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{29}{6}$

b) $\int_0^{\pi}sen(x)dx=-\cos(x)\Big|_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2$

c)

$u=\ln(x)$	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=x$	$v=\frac{x^2}{2}$

$\int x\ln(x)dx=\frac{x^2\ln|x|}{2}-\int\frac{xdx}{2}=\frac{x^2\ln|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+C\Rightarrow\int_1^2 x\ln(x)dx=2\ln2-\frac{3}{4}.$

d)

$u=x$	$u'=1$
$v'=sen(x)$	$v=-\cos(x)$

$\int xsen(x)dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)dx=-x\cos(x)+sen(x)+C$. Entonces:

$\int_{-\pi}^{\pi}xsen(x)dx=\pi+\pi=2\pi$

e) Como $(1+\cos(x))'=-sen(x)\Rightarrow-\int\frac{-sen(x)}{1+\cos(x)}dx=-\ln|1+\cos(x)|+C$

Por tanto: $\int_0^{2\pi}\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}dx=-\ln|1+\cos(x)|\Big|_0^{2\pi}=-\ln2+\ln2=0$

f) $\int_3^5\frac{x}{x-1}dx=\int_3^5\frac{x-1+1}{x-1}dx=\left(x+\ln|x-1|\right)\Big|_3^5=5+\ln4-3-\ln2=2+\ln2$

g) $\int_1^3\frac{x-3}{x}dx=\left(x-3\ln|x|\right)\Big|_1^3=3-3\ln3-1+3\ln1=2-3\ln3$

h) $\int_0^{\pi}e^xsen(x)dx$

$u=e^x$	$u'=e^x$	$u''=e^x$
$v''=sen(x)$	$v'=-\cos(x)$	$v=-sen(x)$

$\int e^xsenx\ dx=-e^x\cos x+e^xsenx-\int e^xsenx\ dx\Rightarrow 2\int e^xsenx\ dx=-e^x\cos x+e^xsenx$

$\int e^xsenx\ dx=\frac{-e^x\cos x+e^xsenx}{2}+C$

$\int_0^{\pi}e^xsen(x)dx=\left(\frac{-e^x\cos x+e^xsenx}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

7.-Calcula:

$a)\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x-1)^3}=\frac{-1}{2(x-1)^2}\Big[_{-2}^{-1}=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2}-\frac{1}{(-3)^2}\right]=\frac{-5}{72}$

$b)\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{x+1}\Big|_0^3=4-2=2$

$c)\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\Big[_0^4=\frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{98}{3}$

$d)\int_2^3\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}=\int_2^3 2x(x^2-1)^{\frac{-1}{2}}dx=\sqrt{x^2-1}\Big|_2^3=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

$e)\int_1^2\left(x+x^3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2=2+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$

$f)\int_0^{\pi}\text{sen}(x).\cos(x)dx=\frac{1}{2}sen^2x\Big[_0^{\pi}=0$

$g)\int_{-1}^4\left(x^2+x-2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big]_{-1}^4=\frac{115}{6}$

$h)\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big]_{-1}^1=\frac{-4}{3}$

$i)\int_1^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{1+x^2}=\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)_1^{\sqrt{3}}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 2}{2}$

$j)\int_1^2 x^3\ln x dx$, por partes:

$\int_1^2 x^3\ln x dx=\left(\frac{x^4\ln(x)}{4}-\frac{x^4}{16}\right)\Big]_1^2=\frac{8\ln(2)}{5}-\frac{279}{400}$

$k)\int_{1/2}^1\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}=\left(-3\ln\left(\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right)\right)\Big]_{\frac{1}{2}}^1=\infty$

$l)\int_1^2\left(\sqrt{1+4x}\right)^2dx=\int_1^2\left(1+4x\right)dx=x+2x^2\Big[_1^2=2+8-1-2=7$

$m)\int_0^1\left(x+2x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

$n)\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=arctg(x)\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$o)\int_0^{\pi}sen(x)dx=\cos x\Big|_0^{\pi}=-1-1=-2$

$p)\int_1^2 x\ln(x)dx$, por partes:

$\int_1^2 x\ln(x)dx=\left(\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\Big]_1^2=2\ln(2)-\frac{3}{4}$

$q)\int_2^3\frac{x}{x-1}dx=\int_2^3\frac{x-1+1}{x-1}dx=\int_2^3\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left(x+ln(x-1)\right)\Big|_2^3=2+\ln 2$

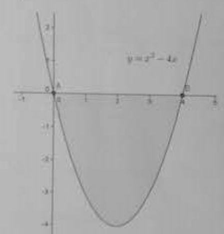
$r)\int_{-\pi}^{\pi}xsen(x)dx=(-x.\cos(x)+senx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi+\pi=2\pi$

$s)\int_0^{\pi}e^x sen(x)dx=\frac{-e^x\cos x+e^x senx}{2}\Big[_0^{\pi}=\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{1}{2}$

$t)\int_0^{2\pi}\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}dx=-\ln(1+\cos(x))\Big|_0^{2\pi}=-\ln 2+\ln 2=0$

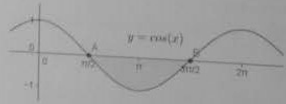
$u)\int_1^3\frac{x-3}{x}dx=\int_1^3\left(1-\frac{3}{x}\right)dx=x-3\ln x\Big|_1^3=3-3\ln 3-1=2-3\ln 3$

8)



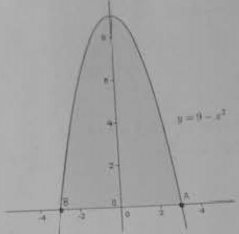
$A=\left|\int_0^4\left(x^2-4x\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-2x^2\Big[_0^4\right|=\frac{32}{3}\text{ u}^2.$

9)



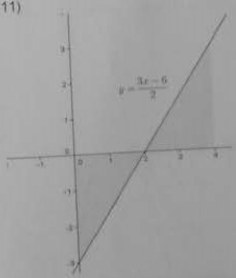
$A=\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(x)dx\right|=\left|sen(x)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right|=2\text{ u}^2.$

10)



$A=\left|\int_{-3}^3\left(9-x^2\right)dx\right|=\left|9x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^3\right|=36\text{ u}^2.$

11)



$A_1=\left|\int_0^2\left(\frac{3x-6}{2}\right)dx\right|=\left|\frac{3x^2}{4}-3x\Big[_0^2\right|=3\text{ u}^2.$

$A_2=\left|\int_2^4\left(\frac{3x-6}{2}\right)dx\right|=\left|\frac{3x^2}{4}-3x\Big[_2^4\right|=3\text{ u}^2.$

Entonces $A=A_1+A_2=6\text{ u}^2.$

12)

$f^-(-1)=\frac{1}{2}+a$, $f^+(-1)=-a+b$ y $f^-(0)=a$, $f^+(0)=2$, por tanto $a=\frac{1}{2},b=2.$

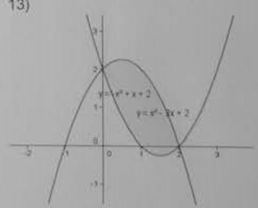
$\int_2^{-1}f(x)dx=-\int_{-1}^2 f(x)dx$, vamos por partes:

$\int_{-1}^0\left(\frac{3x}{2}+2\right)dx=\left(\frac{3x^2}{4}+2x\right)\Big]_{-1}^0=\frac{5}{4}$ y $\int_0^2\left(3x^2+2\right)dx=\left(x^3+2x\right)\Big|_0^2=8+4=12$,

entonces:

$\int_2^{-1}f(x)dx=-\int_{-1}^2 f(x)dx=-\frac{5}{4}-12=\frac{-53}{4}.$

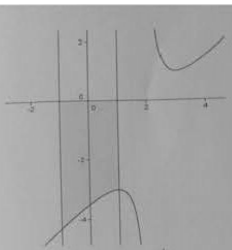
13)



$f(x)-g(x)=x^2-3x+2+x^2-x-2=2x^2-4x$

$A=\left|\int_0^2\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|=\left|\int_0^2\left(2x^2-4x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2\right)\Big]_0^2\right|=\frac{8}{3}u^2$

14)



$$A=\left|\int_{-1}^{1}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)dx\right|=\left|\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x-2|\Big]_{-1}^{1}\right|=(6+\ln 3)\ u^2.$$

15)

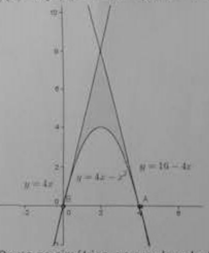
$4x-x^2=0\Rightarrow x=0,x=4$

Tangente a la curva en $x=0$: $y-y(0)=y'(0)(x-0)$

$y(0)=0, y'(x)=4-2x\Rightarrow y'(0)=4\Rightarrow tg_{x=0}\equiv y=4x$

Tangente a la curva en $x=4$: $y-y(4)=y'(4)(x-4)$

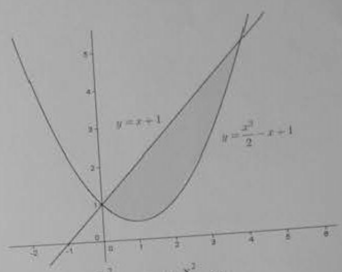
$y(4)=0, y'(x)=4-2x\Rightarrow y'(4)=-4\Rightarrow tg_{x=4}\equiv y=-4(x-4)$



Como es simétrica, se puede calcular el área de 0 a 2 y multiplicarlo por 2:

$$A_1=\left|\int_0^2 (f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_0^2 (x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^2\right|=\frac{8}{3}u^2\Rightarrow A=\frac{16}{3}u^2.$$

16)

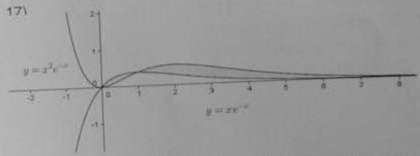


$$f(x)-g(x)=\frac{x^2}{2}-x+1-x-1=\frac{x^2}{2}-2x$$

$$\frac{x^2}{2}-2x=0\Rightarrow x=0,x=4$$

$$A=\left|\int_0^4 (f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_0^4\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{6}-x^2\right)\Big]_0^4\right|=\frac{16}{3}u^2.$$

17)



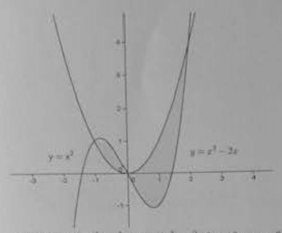
$$f(x)-g(x)=x e^{-x}-x^2e^{-x}\Rightarrow x e^{-x}-x^2e^{-x}=0\Rightarrow x=0,x=1,x\to+\infty$$

$$A_1=\left|\int_0^1\left(x e^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx\right|=\left|e^{-x}(x^2+x+1)\Big]_0^1\right|=\left(\frac{3}{e}-1\right)u^2$$

$$A_2=\left|\int_1^{+\infty}\left(x e^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx\right|=\left|e^{-x}(x^2+x+1)\Big]_1^{+\infty}\right|=\frac{3}{e}u^2$$

Entonces $A=A_1+A_2=\left(\frac{6}{e}-1\right)u^2$.

18)



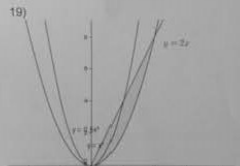
$$f(x)-g(x)=x^3-x^2-2x\Rightarrow x^3-x^2-2x=0\Rightarrow x=0,x=2,x=-1$$

$$A_1=\left|\int_{-1}^0\left(x^3-x^2-2x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big]_{-1}^0\right|=\frac{5}{12}u^2$$

$$A_2=\left|\int_0^2\left(x^3-x^2-2x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big]_0^2\right|=\frac{8}{3}u^2$$

$$A=A_1+A_2=\frac{37}{12}u^2.$$

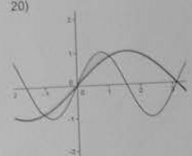
19)



En realidad el recinto está limitado por la recta $y=2x$ y la función $g(x)=x^2/2$, por lo tanto $y-g(x)=2x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2x-\frac{x^2}{2}=0\Rightarrow x=0,x=4$

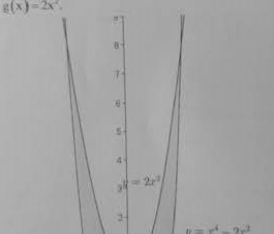
$$A=\left|\int_0^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx\right|=\left|\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Big]_0^4\right|=\frac{16}{3}u^2.$$

20)



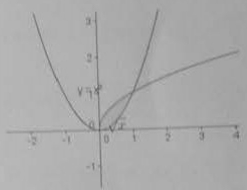
$$A=\left|\int_0^1(sen(x)-sen(2x))dx\right|=\left|\left(-\cos(x)-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\Big]_0^1\right|=\left(\frac{\cos(2)}{2}-\cos(1)+\frac{1}{2}\right)u^2.$$

21.-Halla el área del recinto plano limitado por las curvas $f(x)=x^4-2x^2$ y $g(x)=2x^2$.



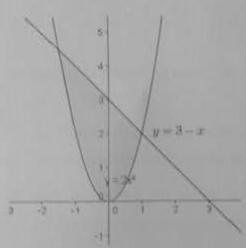
$$A=\left|\int_{-2}^0\left(x^4-4x^2\right)dx\right|+\left|\int_0^2\left(x^4-4x^2\right)dx\right|=2\left|\int_0^2\left(x^4-4x^2\right)dx\right|=\frac{128}{15}u^2$$

23.-Halla el área del recinto plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2$, y $g(x)=\sqrt{x}$.



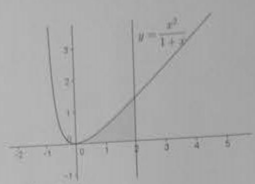
$A = \left| \int_0^1 \left(x^2 - \sqrt{x} \right) dx \right| = \frac{1}{3}\ u^2$

24.-Halla el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = 2x^2$, la recta $y = 3 - x$ y que está en el primer cuadrante.



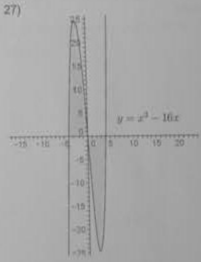
$A = \left| \int_0^1 \left(2x^2 - 3 + x \right) dx \right| = \frac{11}{6}\ u^2$

25.-Halla el área del recinto limitado por $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, el eje de abscisas y la recta $x = 2$.



$A = \left| \int_0^2 \frac{x^2}{1+x} dx \right| = \ln(3)\ u^2$

27)



$A = 2\left| \int_0^4 \left(x^3 - 16x \right) dx \right| = \frac{175}{2}\ u^2$

29) En todos los casos $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

a) $V = \pi \int_0^3 4x^2 dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^3 = 36\pi\ u^3$

b) $V = \pi \int_0^\pi sen^2 x dx$ y como $sen^2 x + \cos^2 x = 1;\ \cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2sen^2 x = 1 - \cos(2x) \Rightarrow sen^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \Rightarrow \int sen^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4} + C$

Por tanto, $V = \pi \int_0^\pi sen^2 x dx = \pi \left[\frac{\pi}{2} + \frac{sen(2\pi)}{4} \right] = \frac{\pi^2}{2}\ u^3$

c) $V = \pi \int_0^4 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^4 = \pi \left[\frac{e^8}{2} - \frac{1}{2} \right]\ u^3$

d) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 sen^2 2x dx = 16\pi \left[\frac{x}{2} + \frac{sen(4x)}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi^2\ u^3$

e) $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y^2 = 64 - x^2,\ x \in [5,8]$
$V = \pi \int_5^8 (64 - x^2) dx = \pi \left[64x - \frac{x^3}{3} \right]_5^8 = \pi \left[64.3 - \frac{8^3}{3} + \frac{5^3}{3} \right] u^3 = 63\pi\ u^3$

f) $V = \pi \int_1^4 x^3 dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^4 = \pi \left[\frac{4^4}{4} - \frac{1}{4} \right] u^3 = \frac{255\pi}{4}\ u^3$

30.-Dada la función f(x) = x sen(x), calcula:

a) $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

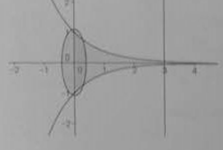
b) El área comprendida entre f(x) y el eje OX en el intervalo $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

c) Compara los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

32.-Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la curva $y = \frac{x^2}{2} + 1$ al girar alrededor del eje X entre las rectas x = -1 y x = 2.

33) $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi\ u^3$

34)



$V = \pi \int_0^3 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \right]_0^3 = \pi \left[\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2} \right] u^3$

35.-La región limitada por la recta $y = x - 3$, la parábola $y = (x - 5)^2$ y el eje X, gira alrededor de este eje. Halla el volumen del cuerpo de revolución que genera.

36.-Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje X el recinto limitado por las funciones $y = \frac{1}{x}$, $x = y^2$ y $x = 4$.

37) a) No, $x^2\big]_{-1}^{1} = 0$, veamos la gráfica donde el mismo área se obtiene por encima del eje X en positivo que por debajo.

b) $\int x\sqrt{1 + x^2} dx = \int \frac{2x(1 + x^2)^{1/2}}{2} = \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3} + C \Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2} dx = \frac{7}{3}$

38) a) Si tomamos $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 2x dx = x^2\big]_0^1 = 1$, cumple que está en [1,2]. Sin embargo, $f(\frac{1}{4}) = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$.

b)

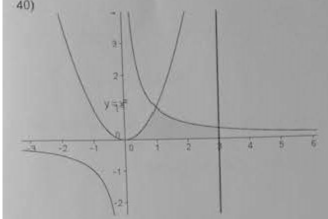
$u = x$	$u' = 1$
$v' = \cos(x)$	$v = -sen(x)$

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos(x) dx = \left(x sen(x) + \cos(x) \right)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

39) Al quedar el área dividida en dos partes iguales:

$\int_{-1}^{2}(2x^3-3x^2+a)dx=0\Rightarrow\left(\frac{x^4}{2}-x^3+ax\right)\Big]_{-1}^{2}=0\Rightarrow\frac{3(2a-1)}{2}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

40)



$A=\left|\int_0^1 x^2dx\right|+\left|\int_1^3\frac{dx}{x}\right|=\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)\text{u}^2$

41) $f(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt=\ln|x|$, $f(a\,b)=\ln|a.b|=\ln|a|+\ln|b|=f(a)+f(b)$.

42)
$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow P'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow P''(x)=6ax+2b\Rightarrow P'''(x)=6a$

Sabemos que $P(1)=0$, $P''(1)=0$, $P'''(1)=24$ y que $\int_0^1 P(x)\,dx$, por lo tanto si $P'''(1)=24$ tenemos que $a=4\Rightarrow P''(x)=24x+2b$ y como $P''(1)=0\Rightarrow b=-12$.
Como la tangente en $x=1$ es horizontal, $P'(1)=0\Rightarrow 12-24+c=0\Rightarrow c=12$ y como $P(1)=0\Rightarrow 4-12+12+d=0\Rightarrow d=-4\Rightarrow P(x)=4x^3-12x^2+12x-4$.

$\int(4x^3-12x^2+12x-4)dx=x^4-4x^3+6x^2-4x+C$

Finalmente: $\int_0^1 P(x)\,dx=1-4+6-4=-1$.

43.-Calcula:

$a)\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$b)\int\frac{2-x}{5+4x-x^2}dx$

c) $\int(x.\ln x)^2\,dx$

$d)\int\frac{5x-6}{2\sqrt{x}}dx$

$e)\int x.arctgx\,dx$

$f)\int x^2sen(2x)dx$

$g)\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

$h)\int\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx$

$i)\int\frac{1}{e^x-1}dx$

$j)\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$

$k)\int\sqrt{4-x^2}dx$

$l)\int\frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx$

$ll)\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$

$m)\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Hacemos el cambio de variable $u=e^x\Rightarrow du=e^xdx$

$\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+3e^x+2}=\int\frac{du}{u^2+3u+2}$ y se convierte en una integral racional:

$u^2+3u+2=0\Rightarrow u=-2, u=-1\Rightarrow\frac{1}{u^2+3u+2}=\frac{A}{u+2}+\frac{B}{u+1}$

$\Rightarrow 1=A(u+1)+B(u+2)$. Tomando $x=-2\Rightarrow A=-1$ y tomando $x=-1\Rightarrow B=1$

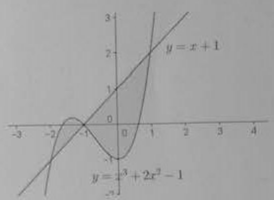
Por lo que $\int\frac{du}{u^2+3u+2}=-\ln|u+2|+\ln|u+1|+C$ y deshaciendo el cambio:

$\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+3e^x+2}=-\ln|e^x+2|+\ln|e^x+1|+C=\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x+2}\right|+C$, por lo que:

$\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\ln\left(\frac{e+1}{e+2}\right)-\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln\left(\frac{3e+3}{2e+4}\right)$

$n)\int_0^1\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

44)

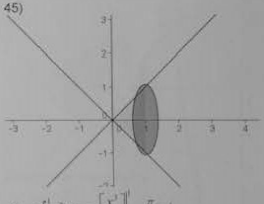


$f(x)-g(x)=x^3+2x^2-1-x-1\Rightarrow f(x)-g(x)=x^3+2x^2-x-2$

$x^3+2x^2-x-2=0\Rightarrow x=-2, x=-1, x=1$

$A=\left|\int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2-x-2)dx\right|=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}\text{u}^2$.

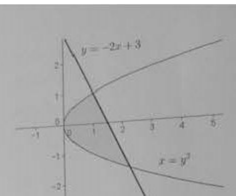
45)



$V=\pi\int_0^1 x^2dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}\text{u}^3$.

46) La recta perpendicular a su tangente es la normal, esto es aquella que se ajusta a la siguiente fórmula: $y-y(1)=\left(\frac{-1}{f'(1)}\right)(x-1)$

Derivamos $1=2y.y'\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{2y(1)}=\frac{1}{2}$, por lo que la recta que nos piden es:
$y-1=-2(x-1)$

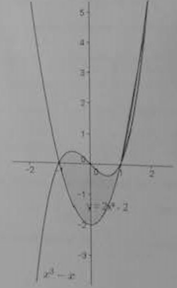


Integramos respecto a y:

$f(y)-g(y)=y+2y^2-3\Rightarrow y+2y^2-3=0\Rightarrow y=1, y=\frac{-3}{2}$

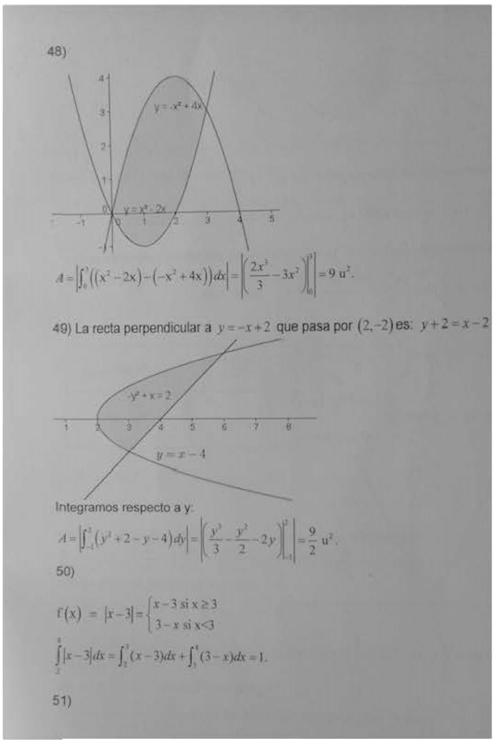
$A=\left|\int_{-3/2}^{1}(y+2y^2-3)dy\right|=\frac{125}{24}\text{u}^2$

47)



$x^3-x-2x^2+2=0\Rightarrow x=2, x=1, x=-1$

$A=\left|\int_{-1}^{1}(x^3-x-2x^2+2)dx\right|+\left|\int_1^2(x^3-x-2x^2+2)dx\right|=\left(\frac{8}{3}+\frac{5}{12}\right)\text{u}^2=\frac{37}{12}\text{u}^2$.



48)

$A=\left|\int_0^3\left((x^2-2x)-(-x^2+4x)\right)dx\right|=\left|\left(\frac{2x^3}{3}-3x^2\right)\Big]_0^3\right|=9\ u^2.$

49) La recta perpendicular a $y=-x+2$ que pasa por $(2,-2)$ es: $y+2=x-2$

Integramos respecto a y:

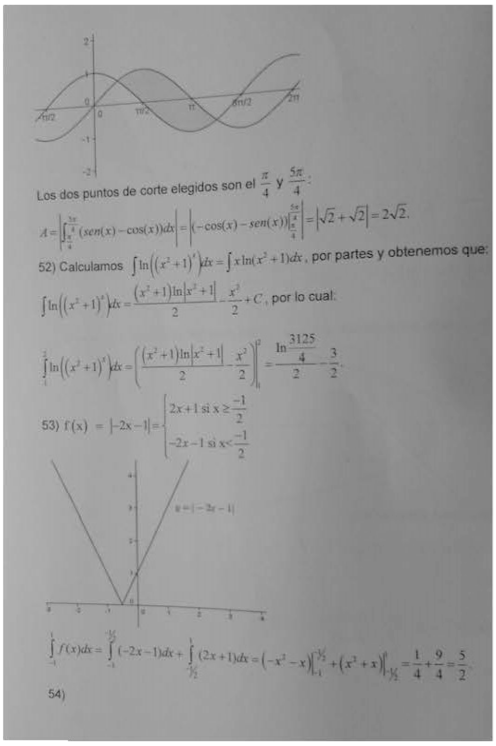
$A=\left|\int_{-1}^{2}\left(y^2+2-y-4\right)dy\right|=\left|\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y\right)\Big]_{-1}^{2}\right|=\frac{9}{2}\ u^2.$

50)

$f(x)=|x-3|=\begin{cases}x-3 \text{ si } x\geq 3\\ 3-x \text{ si } x<3\end{cases}$

$\int_2^4|x-3|dx=\int_3^4(x-3)dx+\int_2^3(3-x)dx=1.$

51)



Los dos puntos de corte elegidos son el $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$:

$A=\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(sen(x)-\cos(x))dx\right|=\left|(-\cos(x)-sen(x))\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\right|=\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{2}.$

52) Calculamos $\int\ln\left((x^2+1)^x\right)dx=\int x\ln(x^2+1)dx$, por partes y obtenemos que:

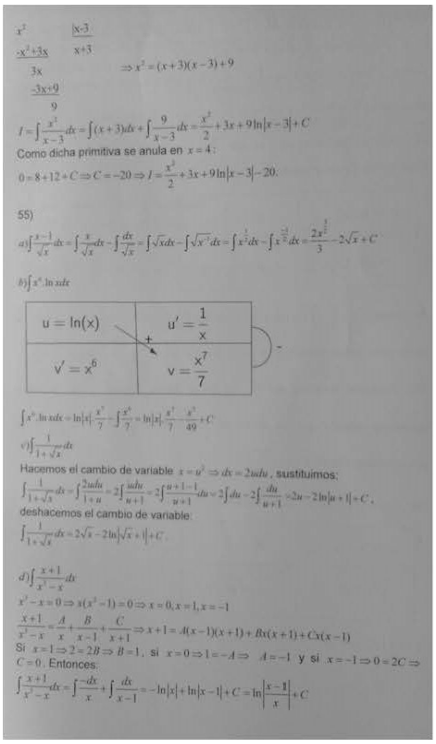
$\int\ln\left((x^2+1)^x\right)dx=\frac{(x^2+1)\ln|x^2+1|}{2}-\frac{x^2}{2}+C$, por lo cual:

$\int_1^2\ln\left((x^2+1)^x\right)dx=\left(\frac{(x^2+1)\ln|x^2+1|}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_1^2=\frac{\ln\frac{3125}{4}}{2}-\frac{3}{2}.$

53) $f(x)=|-2x-1|=\begin{cases}2x+1 \text{ si } x\geq\frac{-1}{2}\\ -2x-1 \text{ si } x<\frac{-1}{2}\end{cases}$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{-1/2}(-2x-1)dx+\int_{-1/2}^{1}(2x+1)dx=\left(-x^2-x\right)\Big]_{-1}^{-1/2}+\left(x^2+x\right)\Big]_{-1/2}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}.$

54)



$$\begin{array}{l|l} x^2 & x-3 \\ \underline{-x^2+3x} & x+3 \\ \quad 3x & \\ \quad \underline{-3x+9} & \\ \qquad 9 & \end{array} \Rightarrow x^2=(x+3)(x-3)+9$$

$I=\int\frac{x^2}{x-3}dx=\int(x+3)dx+\int\frac{9}{x-3}dx=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-3|+C$

Como dicha primitiva se anula en $x=4$:

$0=8+12+C\Rightarrow C=-20\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-3|-20.$

55)

$a)\int\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\sqrt{x}dx-\int\sqrt{x^{-1}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{-1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2\sqrt{x}+C$

$b)\int x^6.\ln x dx$

$u=\ln(x)$	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=x^6$	$v=\frac{x^7}{7}$

$\int x^6.\ln x dx=\ln|x|.\frac{x^7}{7}-\int\frac{x^6}{7}=\ln|x|.\frac{x^7}{7}-\frac{x^7}{49}+C$

$c)\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Hacemos el cambio de variable $x=u^2\Rightarrow dx=2udu$, sustituimos:

$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{2udu}{1+u}=2\int\frac{udu}{u+1}=2\int\frac{u+1-1}{u+1}du=2\int du-2\int\frac{du}{u+1}=2u-2\ln|u+1|+C,$

deshacemos el cambio de variable:

$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$

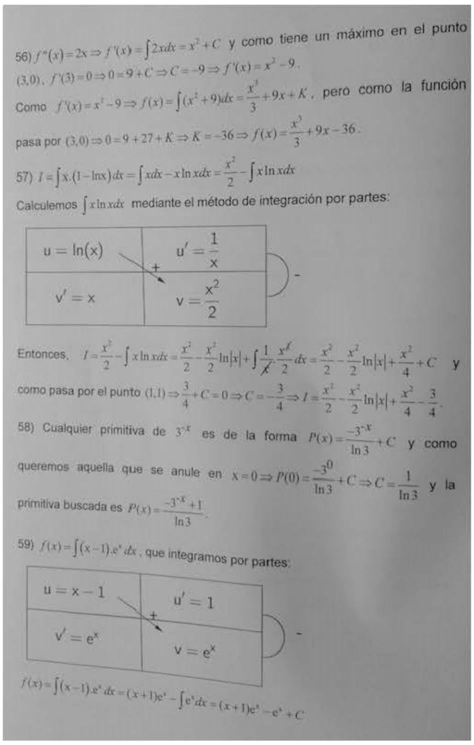
$d)\int\frac{x+1}{x^3-x}dx$

$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0, x=1, x=-1$

$\frac{x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow x+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$

Si $x=1\Rightarrow 2=2B\Rightarrow B=1$, si $x=0\Rightarrow 1=-A\Rightarrow A=-1$ y si $x=-1\Rightarrow 0=2C\Rightarrow C=0$. Entonces:

$\int\frac{x+1}{x^3-x}dx=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$



56) $f''(x)=2x\Rightarrow f'(x)=\int 2xdx=x^2+C$ y como tiene un máximo en el punto $(3,0)$, $f'(3)=0\Rightarrow 0=9+C\Rightarrow C=-9\Rightarrow f'(x)=x^2-9$.

Como $f'(x)=x^2-9\Rightarrow f(x)=\int(x^2+9)dx=\frac{x^3}{3}+9x+K$, pero como la función pasa por $(3,0)\Rightarrow 0=9+27+K\Rightarrow K=-36\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}+9x-36$.

57) $I=\int x.(1-\ln x)dx=\int xdx-x\ln xdx=\frac{x^2}{2}-\int x\ln xdx$

Calculemos $\int x\ln xdx$ mediante el método de integración por partes:

$u=\ln(x)$	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=x$	$v=\frac{x^2}{2}$

Entonces, $I=\frac{x^2}{2}-\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln|x|+\int\frac{1}{\cancel{x}}\frac{x^{\cancel{2}}}{2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln|x|+\frac{x^2}{4}+C$ y como pasa por el punto $(1,1)\Rightarrow\frac{3}{4}+C=0\Rightarrow C=-\frac{3}{4}\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln|x|+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}$.

58) Cualquier primitiva de 3^{-x} es de la forma $P(x)=\frac{-3^{-x}}{\ln 3}+C$ y como queremos aquella que se anule en $x=0\Rightarrow P(0)=\frac{-3^0}{\ln 3}+C\Rightarrow C=\frac{1}{\ln 3}$ y la primitiva buscada es $P(x)=\frac{-3^{-x}+1}{\ln 3}$.

59) $f(x)=\int(x-1).e^x dx$, que integramos por partes:

$u=x-1$	$u'=1$
$v'=e^x$	$v=e^x$

$f(x)=\int(x-1).e^x dx=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x+C$

Además tiene un extremo en el eje OX, es decir $(x-1).e^x=0 \Rightarrow x=1$, que es el extremo que posee en el eje OX, por tanto $f(1)=0 \Rightarrow 2e-e+C=0 \Rightarrow C=-e$ y la función f es $f(x)=(x+1)e^x-e^x-e$.

60) $f\ ''(x)=x \Rightarrow f'(x)=\int x dx=\frac{x^2}{2}+C$, como, $f\ '(1)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+C=0 \Rightarrow C=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}x+K$, al ser $f(e)\ =\frac{e}{4}$,

$\Rightarrow \frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}+K=\frac{e}{4} \Rightarrow K=\frac{3e}{4}-\frac{e^3}{6} \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}x+\frac{3e}{4}-\frac{e^3}{6}$

61), pero como $f\ ''(0)=2$, entonces:

$2=12.0^2+C \Rightarrow C=2 \Rightarrow f''(x)=12x^2+2$

$f'(x)=\int\left(12x^2+2\right)dx=4x^3+2x+K \Rightarrow 1=K \Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+1$

$f(x)=\int\left(4x^3+2x+1\right)dx=x^4+x^2+x+H \Rightarrow H=2 \Rightarrow f(x)=x^4+x^2+x+2$

C. Primera prueba opcional para subir nota

Gobierno de Navarra
Departamento de Educación

Primera prueba opcional para subir nota. Tercera evaluación.

NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………………………………………………

Realiza el ejercicio y elige la respuesta correcta, solamente hay una única respuesta correcta.

1) El $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sec x-8}{\operatorname{tg}x-8}+\left(\cos x+\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right)$ vale:

a) $e^{1-\frac{2}{\pi}}$ b) $1+e^{1-\frac{2}{\pi}}$ c) $1-e^{1-\frac{2}{\pi}}$ d) Ninguna de las anteriores es correcta.

2) El $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^3-8x^2+7x}{x-\operatorname{sen}x}$ vale:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) Ninguna de las anteriores es correcta.

3) El $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\ln x}\right)\cdot\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}$ vale:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) Ninguna de las anteriores es correcta.

4) ¿Corta la función $f(x)=x^3+2x-4$ en más de un punto al eje OX en el intervalo $[1,2]$?

a) Sí, en 2 puntos b) No c) Sí en tres puntos d) Ninguna de las anteriores es correcta.

5) Sea g(x) la función definida mediante: $g(x)=\begin{cases} ax(x+1) \text{ si } x\in[-1,0] \\ x(x-1)^2 \text{ si } x\in(0,1] \end{cases}$

¿Para qué valores de a puede aplicarse el teorema de Rolle a la función g(x) en el intervalo [-1, 1]?

a) a = 1 b) a = 2 c) a = 3 d) Ninguna de las anteriores es correcta.

6) El resultado de $\int x^3(e^{3x} - \mathrm{sen}(2x))dx$ es

a) $\frac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2-6x-2\right)}{27}+\frac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4}+\frac{3(1-2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8}+C$

b) $\frac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2+6x-2\right)}{27}+\frac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4}+\frac{3(1+2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8}+C$

c) $\frac{e^{3x}\left(9x^3-9x^2+6x-2\right)}{27}+\frac{x(2x-3)^2\cos(2x)}{4}+\frac{3(1-2x^2)\mathrm{sen}(2x)}{8}+C$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

7) El resultado de $\int \frac{x^3+2x}{x^2-5x+6}dx$ es

a) $33\ln(x-3)-12\ln(x-2)+\frac{x^2}{2}+5x+C$ b) $33\ln(x-3)-12\ln(x-2)+\frac{x^2}{2}+4x+C$

c) $33\ln(x-3)-12\ln(x-2)+\frac{x^2}{12}+5x+C$ d) Ninguna de las anteriores es correcta.

8) El resultado de $\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}dx$ es

a) $2+\mathrm{Ln}(x^2+x+1)+\frac{x^2}{2}-x+C$ b) $\mathrm{Ln}(x^2+x+1)+\frac{x^2}{2}-x-2+C$

c) Las dos anteriores son correctas. d) Ninguna de las anteriores es correcta.

9) El resultado de $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$ es

a) $x-2\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$ b) $x-2\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

c) $x-2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)+C$ d) Ninguna de las anteriores es correcta.

10) El resultado de $\int\left(\sec^2(3x+1)-2\cos(5x+1)+\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}{x^7}\right)dx$ es

a) $-\frac{2\mathrm{sen}(5x+1)}{5}+\frac{\mathrm{tg}(3x+1)}{3}-\frac{2}{9x^{9/2}}+C$

b) $-\frac{2\mathrm{sen}(5x+1)}{5}+\frac{\mathrm{tg}(3x-1)}{3}-\frac{2}{9x^{9/2}}+C$

c) $-\frac{2\mathrm{sen}(5x+1)}{5}+\frac{\mathrm{tg}(3x+1)}{3}-\frac{2}{7x^{7/2}}+C$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

D. Segunda prueba opcional para subir nota

Gobierno de Navarra
Departamento de Educación

Segunda prueba opcional para subir nota. Tercera evaluación.

NOMBRE Y APELLIDOS:...

Realiza el ejercicio y elige la respuesta correcta, solamente hay una única respuesta correcta.

1) La función G tal que G"(x)=6x+1; G(0)=1 y G(1)=0

a) $G(x)=x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{5x}{2}-1$

b) $G(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+1$

c) $G(x)=x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+1$

d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si } x<0 \\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x+5}{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$ con a un parámetro real. El valor de a

para que $\int_0^3 f(x)\,dx=15$ es:

a) 2 b) 1 c) $\frac{3}{5}$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

3) Dada la función $f(x)=rx^2+s\ln x$. Para r = 1 y s = 0, el valor de $\int_2^4 f(x)\,dx$ es:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{55}{3}$ c) $\frac{56}{3}$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

4) Dada la función $f(x) = -x^2 + x + 1$, el área del recinto limitado por $y = f(x)$, $y = f'(x)$ es: a) $S = \frac{9}{8}\ u^2$ b) $S = \frac{9}{5}\ u^2$ c) $S = \frac{9}{2}\ u^2$

d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

5) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. El área del recinto plano limitado por y = f(x), y = 0, x = 0, x = 2 es:

a) $\frac{37}{4}\ u^2$ b) $\frac{37}{5}\ u^2$ c) $\frac{37}{3}\ u^2$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

6) El valor de *m* (que supondremos positivo) para que el área delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ valga $36\ u^2$ es:

a) $m = 2$ b) $m = 4$ c) $m = 6$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

7) El volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax, a > 0$, que intercepta la recta $x = a$ es:

a) $V = \frac{16}{5} a^3 \pi\ u^3$ b) $V = \frac{15}{6} a^3 \pi\ u^3$ c) $V = \frac{11}{3} a^3 \pi\ u^3$

d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

8) La integral $\int \frac{x^5 dx}{x^2 + 4}$ da por resultado:

a) $8\ln(x^2 + 4) + \frac{3x^4}{4} - 2x^2 + C$ b) $8\ln(x^2 + 4) + \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$

c) $8\ln(x^2 + 1) + \frac{3x^4}{4} - 2x^2 + C$ d) Ninguna de las respuestas anteriores son correctas.

E. Examen tercera evaluación

Elige una opción entre la A y B. Todos los ejercicios tienen la misma validez.

OPCIÓN A

1.- Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int tg(x)\,dx$ b) $\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx$ c) $\int \frac{4x-7}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$

2.- Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{sen(x)}{1+\cos(x)}\,dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x sen(x)\,dx$ c) $\int_1^2 (x+x^3)\,dx$

3.- Calcula el área del recinto limitado por las funciones: $y = x+1$, $y = x^3+2x^2-1$

4.- Halla una función f(x) que cumpla: $f''(x) = 2x$, y tiene un máximo en (3,0).

5.- Halla una primitiva de $f(x) = 3^{-x}$ que se anule en x=0.

6.- Sea $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, y sean a, b $\in R^+$. Demuestra que f(a.b) = f(a) + f(b)

7.- Se sabe que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. ¿Se puede asegurar que a = b? Razona la respuesta.

8.- Encuentra el volumen generado por la siguiente función al rotar sobre el eje X:
$x^2 + y^2 = 64$, $x \in [5,8]$

9.-Calcula los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{x\cos^2 x}$ $b)\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$ $c)\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ $d)\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)$

10.- Determina a, b y c para que f(x) verifique el Teorema de Rolle en $[0,\pi]$

$$f(x)=\begin{cases} a.senx + b.\cos x + c & si \quad x<\frac{\pi}{2} \\ sen^2 x - a.\cos x & si \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

BACHILLERATO

Directores:
Esteban Indurain Eraso, Departamento de Matemáticas